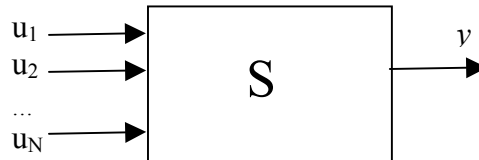


Alcune proprietà dei circuiti lineari

Antonio Maffucci, Fabio Villone

IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Il *principio di sovrapposizione degli effetti* è forse la più importante conseguenza della proprietà di linearità di un sistema. Per illustrare questo principio facciamo riferimento ad un sistema lineare S che abbia un certo numero N di “*ingressi*” (u_i) ed una “*uscita*” (y). L’estensione del risultato al caso di più uscite è banale.



Descrizione ingresso-uscita di un sistema S .

Per l’ipotesi di linearità del sistema, l’uscita sarà una combinazione lineare degli ingressi:

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_N u_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i,$$

dove i coefficienti α_i sono indipendenti dagli ingressi. Questo risultato può essere riscritto come:

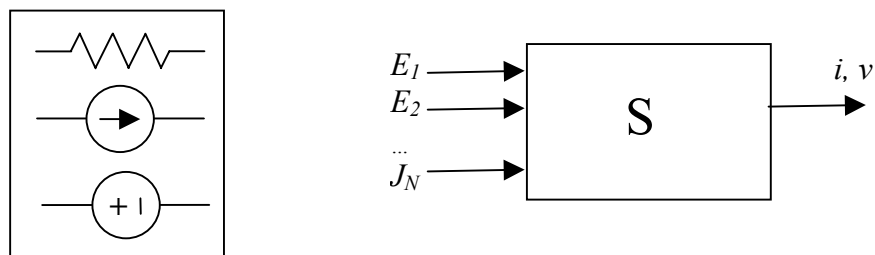
$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_N,$$

dove

$$y_k = y|_{u_i=0 \ (i \neq k)}.$$

Il risultato appena enunciato è la formalizzazione del *principio di sovrapposizione degli effetti*: *la risposta di un sistema lineare si può ottenere come sovrapposizione delle risposte del sistema a ciascuno degli ingressi, considerato separatamente* (y_k è la risposta del sistema quando tutti gli ingressi ad eccezione di quello di indice k sono nulli).

Per vedere come si traduce questo principio nell’ambito dei circuiti elettrici, consideriamo un circuito costituito da un certo numero di generatori indipendenti di tensione e di corrente e da resistori lineari. Applicando il modello circuitale è facile mostrare che la questo circuito è lineare e quindi la corrente o la tensione relative ad un generico bipolo della rete (le “*uscite*” del problema) si possono esprimere come combinazione lineari dei generatori (gli “*ingressi*”, cioè le grandezze note).

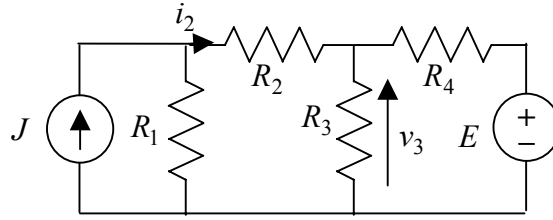


Descrizione ingresso-uscita di una rete elettrica lineare.

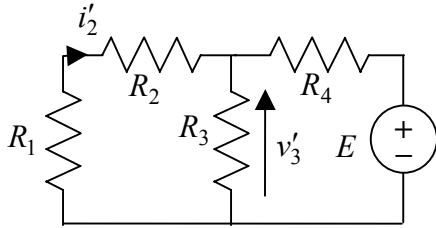
Per il *principio di sovrapposizione degli effetti* possiamo allora affermare che: *la generica corrente (o tensione) di una rete lineare è la somma delle correnti (o tensioni) che ciascuno dei generatori produrrebbe se agisse da solo.*

Osserviamo che, per poter valutare i contributi dei vari generatori occorre analizzare tanti circuiti *ausiliari* quanti sono i generatori: ciascun circuito è ottenuto lasciando “acceso” uno solo dei generatori e “spegnendo” tutti gli altri. Ricordiamo che *spegnere un generatore di tensione equivale a sostituirlo con un corto-circuito* ($v = 0$) e che *spegnere un generatore di corrente equivale a sostituirlo con un circuito aperto* ($i = 0$).

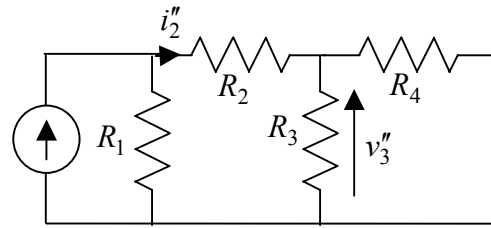
Si consideri, ad esempio, la rete seguente, nella quale agisce un generatore di corrente ed uno di tensione. Si supponga di dover valutare la corrente i_2 e la tensione v_3 .



Applicare la sovrapposizione degli effetti significa risolvere i due circuiti *ausiliari* seguenti e sommare i contributi ottenuti. Il primo tiene conto dell'effetto del solo generatore di tensione (quello di corrente è stato sostituito con un circuito aperto), il secondo del solo generatore di corrente (quello di tensione è stato sostituito con un corto-circuito)



circuito ausiliario I



circuito ausiliario II

Analizzando il circuito ausiliario I si mostra facilmente che:

$$v_3' = E \frac{R_A}{R_4 + R_A} \quad \left(R_A = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right), \quad i_2' = -\frac{v_3'}{R_1 + R_2}.$$

Analizzando il circuito ausiliario II si ha invece:

$$i_2'' = J \frac{R_1}{R_B + R_1} \quad \left(R_B = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right), \quad v_3'' = R_3 i_2'' \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

La soluzione sarà quindi la somma dei contributi:

$$i_2 = i_2' + i_2'' = -\frac{R_A E}{(R_4 + R_A)(R_1 + R_2)} + \frac{R_1 J}{R_B + R_1},$$

$$v_3 = v_3' + v_3'' = \frac{R_A E}{R_4 + R_A} + \frac{J R_1 R_3 R_4}{(R_B + R_1)(R_3 + R_4)}.$$

Nota.

Consideriamo ancora una rete lineare, di cui però non siamo interessati a calcolare una corrente o una tensione di un bipolo ma ad esempio la potenza elettrica da esso assorbita. In questo caso il principio di sovrapposizione degli effetti non si può applicare: non è possibile sovrapporre le potenze ottenute risolvendo i circuiti ausiliari. Ricordiamo che in una rete lineare il modello circuitale assicura che le correnti e le tensioni di ogni bipolo sono funzioni lineari dei generatori, mentre le potenze sono funzioni non lineari (legate al quadrato delle correnti o delle tensioni).

Ad esempio, nel circuito appena analizzato il modo corretto di valutare la potenza assorbita da R_2 sarebbe quello di calcolare prima i_2 con la sovrapposizione degli effetti e poi valutare:

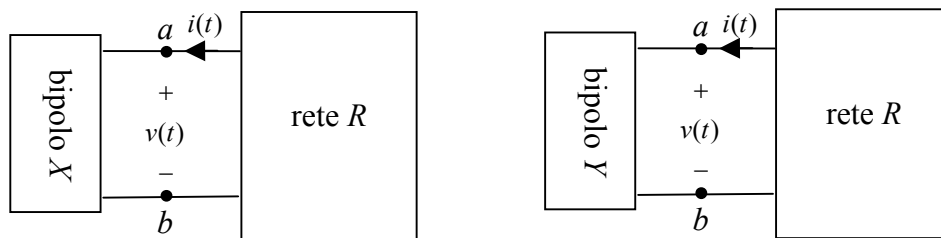
$$P = R_2 (i_2' + i_2'')^2 \neq R_2 i_2'^2 + R_2 i_2''^2.$$

Osserviamo che questo risultato non contraddice il principio di conservazione delle potenze, il quale garantisce che la somma delle potenze assorbite da tutti i bipoli di una rete è sempre nulla. La conservazione va correttamente applicata ai bipoli di ciascuna delle tre reti analizzate, ma non implica la possibilità di sommare potenze relative a bipoli di reti diverse.

IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Il concetto di *equivalenza* è uno dei concetti fondamentali della Teoria dei Circuiti, non solo per le sue implicazioni teoriche ma anche per le immediate applicazioni pratiche che ne conseguono, che consentono di semplificare di molto l'analisi dei circuiti elettrici.

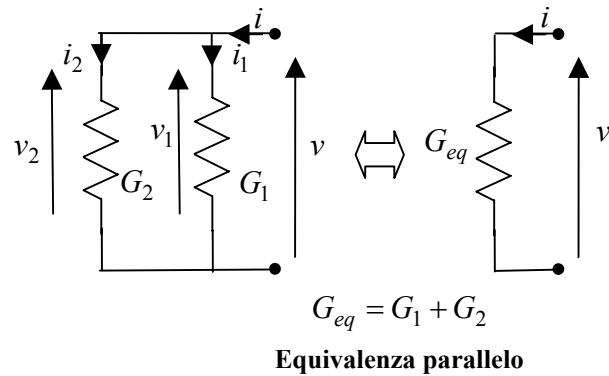
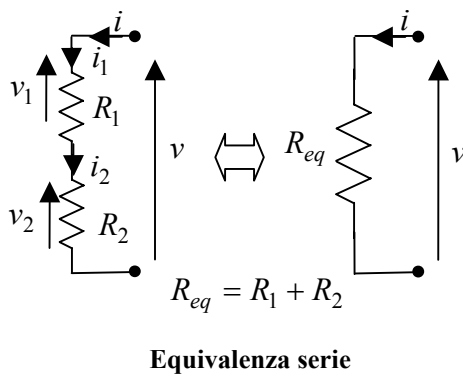
Si consideri il caso generale mostrato in figura di un bipolo X collegato ad una rete R . Il concetto di equivalenza, allora, si può introdurre nel seguente modo: *un bipolo Y è equivalente al bipolo X se la sostituzione di X con Y lascia inalterato il funzionamento della rete R (qualunque sia la rete R).*



Il bipolo Y è equivalente al bipolo X .

Si osservi che i bipoli X ed Y non sono necessariamente costituiti da un unico elemento circuitale, ma potrebbero, nel caso generale, rappresentare una sottorete di bipoli collegata alla rete R attraverso la coppia di morsetti a - b .

Se i bipoli sono *statici* (resistori) allora il principio di equivalenza si può formulare come segue: *due bipoli statici X e Y sono equivalenti se hanno la stessa caratteristica.*



Equivalenza serie: due resistor di resistenza R_1 ed R_2 collegati in serie sono equivalenti ad un unico resistore di resistenza $R_{eq} = R_1 + R_2$.

Per provarlo basta applicare la LKT e la definizione di serie di due bipoli:

$$v = v_1 + v_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i.$$

Questo risultato si estende facilmente al caso di un numero n qualsiasi di resistori in serie. Se dei resistori si conosce la conduttanza, si mostra che

$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Equivalenza parallelo: due resistor di conduttanza G_1 e G_2 collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico resistore di conduttanza $G_{eq} = G_1 + G_2$.

Per provarlo basta applicare la LKC e la definizione di parallelo di due bipoli:

$$i = i_1 + i_2 = G_1 v_1 + G_2 v_2 = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2) v$$

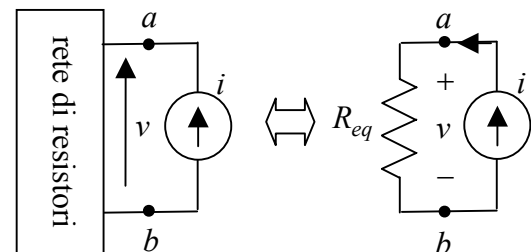
Questo risultato si estende facilmente al caso di un numero n qualsiasi di resistori in parallelo. Se dei resistori si conosce la resistenza, è facile mostrare che

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

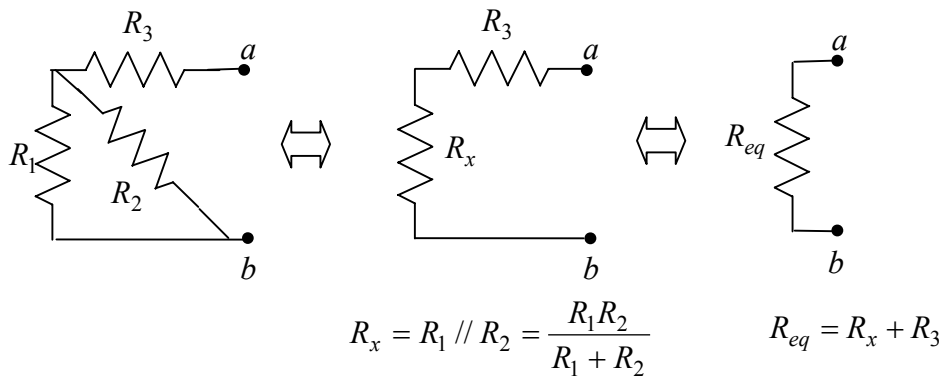
Resistenza equivalente di una rete di resistori.

Nel caso generale, per valutare il resistore equivalente ad una rete di resistori vista ai capi di una coppia di morsetti $a-b$ occorre imporre la corrente (collegando ai morsetti $a-b$ un generatore ideale di corrente i) e calcolare la tensione corrispondente:

$$R_{eq} = \frac{v}{i}.$$



In moltissimi casi di interesse applicativo, la R_{eq} si può valutare applicando iterativamente le equivalenze serie e parallelo, eliminando tutti i nodi fino ad arrivare ai due soli nodi corrispondenti ai morsetti $a-b$:



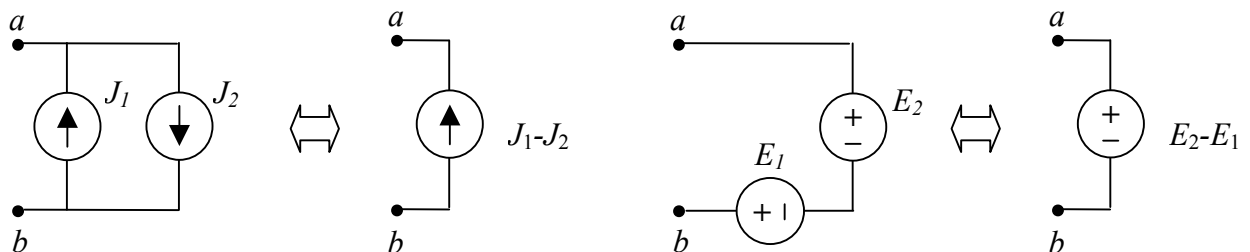
Esempio di calcolo di una resistenza equivalente.

In maniera duale, la conduttanza equivalente ad una rete di resistori vista ai capi di una coppia di morsetti $a-b$ si ottiene dal rapporto tra la corrente e la tensione ai capi della stessa coppia di morsetti, avendo imposto la tensione con un generatore ideale di tensione.

Equivalenti di reti di generatori.

Due generatori ideali di tensione collegati in serie sono equivalenti ad un unico generatore di tensione pari alla somma algebrica dei due (i segni dipendono dalle polarità dei generatori).

Due generatori ideali di corrente collegati in parallelo sono equivalenti ad un unico generatore di corrente pari alla somma algebrica dei due (i segni dipendono dalle polarità dei generatori).



Equivalenti di reti di generatori.

Nota.

Si noti che, collegando due generatori indipendenti di tensione in parallelo o due generatori indipendenti di corrente in serie si ottengono problemi *malposti*, cioè situazioni patologiche che non hanno soluzione o ne ammettono infinite.

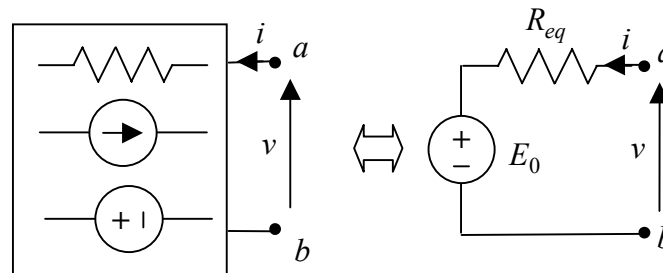
TEOREMA DEL GENERATORE EQUIVALENTE (THÉVENIN E NORTON)

Teorema di Thévenin

Si consideri una rete qualsiasi, costituita da resistori lineari e da generatori ideali. Ai capi di una sua qualunque coppia di morsetti $a-b$, la rete in oggetto può essere sostituita dal bipolo costituito dalla serie di un generatore ideale di tensione E_0 e una resistenza equivalente R_{eq} , essendo:

E_0 = tensione ai morsetti $a-b$ quando tra gli stessi vi è un circuito aperto (*tensione a vuoto*);

R_{eq} = resistenza equivalente ai capi dei morsetti $a-b$ della rete resa *passiva* (cioè della rete ottenuta spegnendo tutti gli elementi attivi).

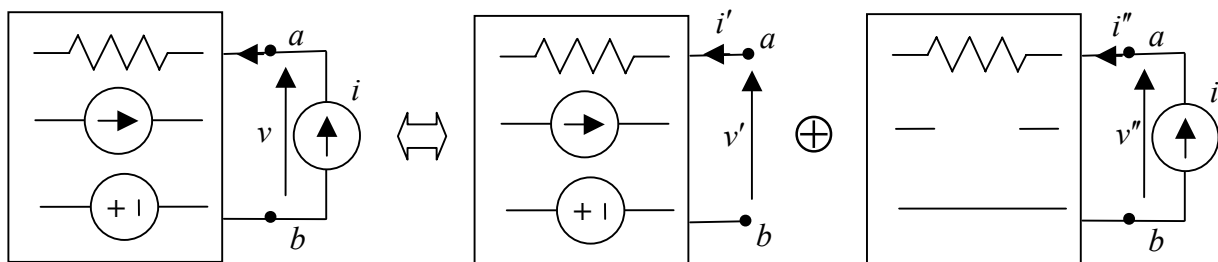


Generatore equivalente di Thévenin.

Per dimostrare il teorema basta verificare che i due bipoli hanno la stessa caratteristica: ciò equivale a mostrare che, collegando ai morsetti un generatore ideale di corrente i , la tensione v che se ne ricava è la stessa per i due bipoli.

La linearità della rete consente di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti¹, quindi possiamo considerare i due circuiti ausiliari ottenuti facendo agire una volta il solo generatore esterno e una volta i soli generatori interni:

$$i = i' + i'', \quad v = v' + v''.$$



Per come sono definiti i due circuiti ausiliari si ha, evidentemente:

$$i' = 0, \quad i'' = i, \quad v' = E_0, \quad v'' = R_{eq}i'',$$

con E_0 ed R_{eq} definiti come sopra. Se ne conclude che la caratteristica della rete è la seguente:

$$v = E_0 + R_{eq}i$$

ed è la stessa della serie generatore di tensione – resistore rappresentata in figura.

¹ Trascuriamo qui eventuali situazioni “patologiche” per le quali la soluzione non esista o non sia unica.

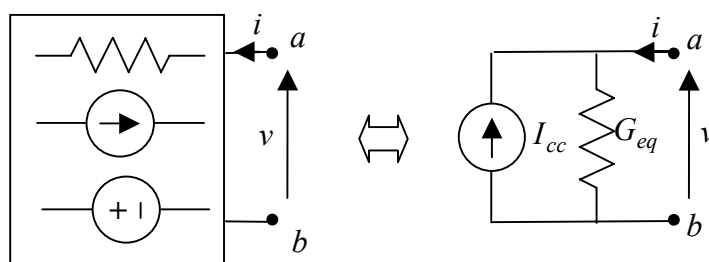
Teorema di Norton

Si consideri una rete qualsiasi, costituita da resistori lineari e da generatori ideali. Ai capi di una sua qualunque coppia di morsetti $a-b$, la rete in oggetto può essere sostituita dal bipolo costituito da un generatore ideale di corrente I_{cc} in parallelo ad una conduttanza G_{eq} , essendo:

I_{cc} = corrente che circola in un corto-circuito posto tra i morsetti $a-b$ (*corrente di corto circuito*)

G_{eq} = conduttanza equivalente ai capi dei morsetti $a-b$ della rete resa *passiva* (cioè della rete ottenuta spegnendo tutti gli elementi attivi).

(Il lettore provi a dimostrare il teorema di Norton applicando la sovrapposizione degli effetti).

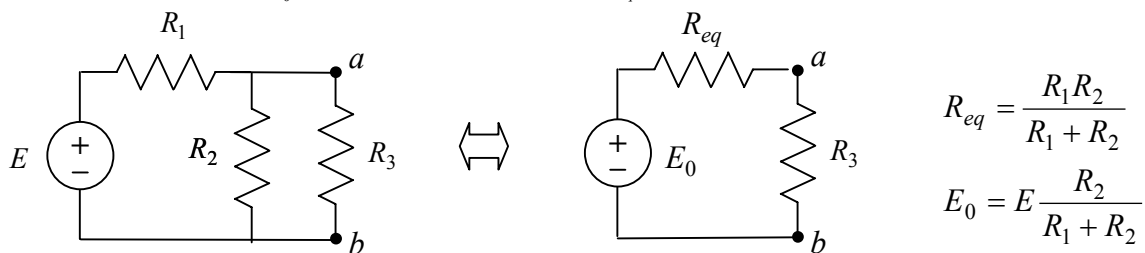


Generatore equivalente di Norton.

Applicando il concetto di equivalenza è facile mostrare che i bipoli di Thévenin e di Norton sono tra di loro equivalenti se i parametri che li definiscono sono legati dalle relazioni:

$$I_{cc} = R_{eq} E_0, \quad R_{eq} = 1 / G_{eq}.$$

E' bene inoltre evidenziare che i parametri degli equivalenti di Thévenin e di Norton non hanno altra interpretazione se non quella fornita dall'enunciato del teorema. Ad esempio, non è possibile valutare la potenza elettrica erogata dai generatori della rete di partenza calcolando la potenza erogata dal generatore di Thévenin o di Norton nella rete equivalente ottenuta. Allo stesso modo la potenza assorbita da R_{eq} non è uguale a quella assorbita dalla parte resistiva della rete di cui si è ottenuto l'equivalente. Si consideri, per esempio, la semplice situazione descritta nella figura seguente e si mostri che $P_{E_0}^{erog} \neq P_E^{erog}$, $P_{R_1} + P_{R_2} \neq P_{R_{eq}}$, mentre P_{R_3} è ovviamente la stessa.



Si osservi che possono esistere situazioni in cui è impossibile ottenere l'equivalente di Thévenin ma esiste quello di Norton o viceversa. Nella rete seguente, ad esempio, ai capi dei morsetti $a-b$ è possibile definire solo l'equivalente di Norton.

