

CAPITOLO 3

PROPRIETA' DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF

3.1 Introduzione

In questo Capitolo studieremo le proprietà delle equazioni circuitali derivanti unicamente dalla struttura peculiare delle equazioni di Kirchhoff. Attraverso queste proprietà è possibile affrontare e risolvere i problemi che nascono dalla complessità delle equazioni circuitali dovuta al numero di bipoli presenti e al modo in cui essi sono tra loro collegati. In particolare, faremo vedere come si rappresentano le connessioni di un generico circuito tramite un grafo. Ciò renderà possibile una trattazione formale delle equazioni di Kirchhoff, delle loro proprietà di indipendenza, del teorema di conservazione delle potenze elettriche e del teorema di Tellegen (questi sono teoremi fondamentali della teoria dei circuiti). Inoltre, introdurremo il concetto di potenziale di nodo e il concetto di corrente di maglia e le formulazioni delle equazioni circuitali che su di essi si basano .

Come faremo vedere nel Capitolo 5, tramite i grafi è possibile anche trattare gli elementi con più di due terminali allo stesso modo in cui si tratta un elemento con due terminali.

3.2 Grafo di un circuito

Dal modo stesso in cui sono state enunciate le leggi di Kirchhoff, discende che esse non fanno alcun riferimento alla struttura “interna” dei diversi componenti. Le equazioni che si ottengono imponendo le leggi di Kirchhoff, *equazioni di*

Kirchhoff, dipendono solo da come gli elementi circuitali sono connessi tra loro e non dalla loro natura fisica.

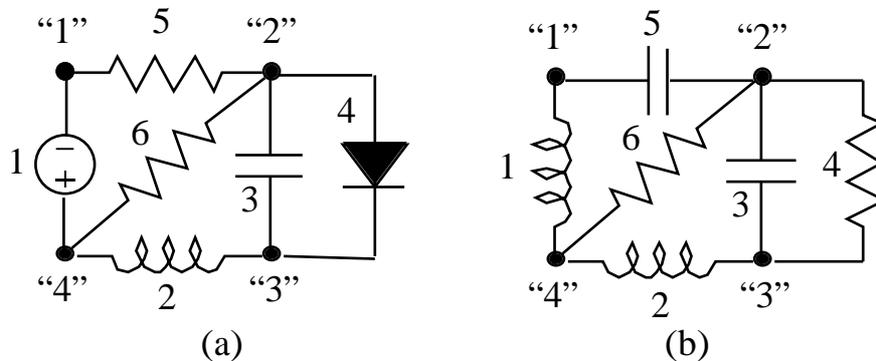


Fig. 3.1 Due circuiti con lo stesso grafo.

Si considerino i due esempi di circuito, riportati in Figura 3.1. Benché siano costituiti da bipoli diversi, essi hanno due cose in comune:

- (i) il numero di nodi e di bipoli;
- (ii) il modo in cui i bipoli sono tra loro collegati.

Nei due circuiti i valori delle grandezze incognite sono, ovviamente, diverse, ma le relazioni tra di esse che si ottengono applicando le leggi di Kirchhoff sono le stesse. In conseguenza di ciò le equazioni di Kirchhoff per le intensità di corrente e le tensioni del circuito illustrato in Figura 3.1a sono uguali alle equazioni di Kirchhoff per le intensità di corrente e le tensioni del circuito illustrato in Figura 3.1b, sempre ché abbiamo assunto riferimenti analoghi (oppure si abbia lo stesso “grafo orientato”, vedi appresso).

Da questa semplice constatazione deriva che, per scrivere le equazioni di Kirchhoff di un determinato circuito non occorre fare riferimento specificamente al sistema fisico che lo costituisce, ma è sufficiente riferirsi a una struttura astratta di tipo “geometrico” (in realtà non occorre neppure questa caratteristica) che contenga soltanto:

- (a) i nodi (tutti) del circuito;
- (b) i collegamenti tra questi realizzati tramite i bipoli.

Alle equazioni di Kirchhoff ci si riferisce a volte usando l’espressione “*equazioni topologiche*” per evidenziare il fatto che esse dipendono solo dalle caratteristiche topologiche del circuito.

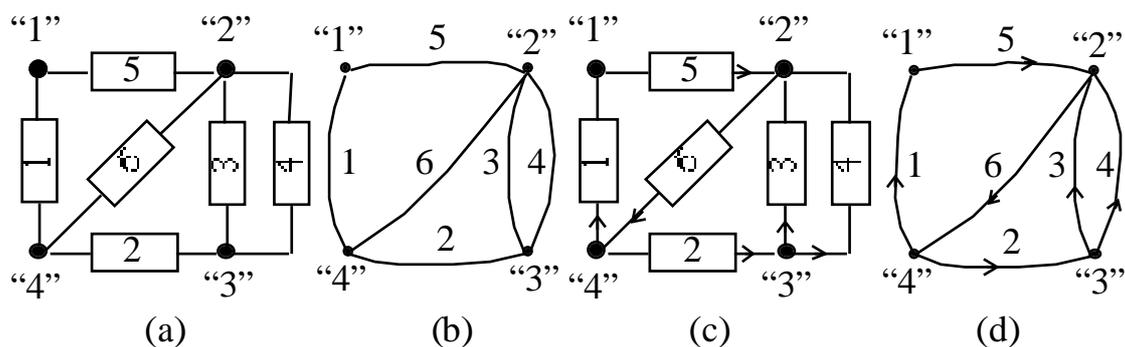


Fig. 3.2 (a) Circuito; (b) grafo corrispondente; (c) circuito orientato; (d) grafo orientato corrispondente.

Si consideri il circuito di bipoli disegnata in Figura 3.2a e il corrispondente schema “geometrico” di Figura 3.2b. Questo schema è un esempio di *grafo*¹. Come si vede, nel grafo, i bipoli sono “scomparsi”, mentre tutti i *nod*i sono presenti: al posto dei bipoli, sono stati semplicemente indicati delle linee detti “*lati*”, che collegano fra loro i nodi allo stesso modo che nel circuito di partenza. I due circuiti riportati in Figura 3.1 hanno lo stesso grafo.

Ora, è immediato constatare che, se i bipoli di Figura 3.2a vengono orientati in base ai versi di riferimento delle intensità di corrente, scelti in modo qualsiasi (come, ad esempio, in Figura 3.2c), e, allo stesso tempo, lo schema corrispondente è orientato, lato per lato, allo stesso modo (Figura 3.2d), per scrivere le equazioni di Kirchhoff per le correnti è sufficiente riferirsi al *grafo orientato*, piuttosto che al circuito di partenza.

È, inoltre, evidente che, anche la scrittura delle equazioni esprimenti le leggi di Kirchhoff per le tensioni può essere effettuata basandosi esclusivamente sul grafo orientato (senza bisogno di ricorrere al circuito di partenza). La cosa è di per sé ovvia quando si stabilisca, una volta per tutte, di fare per ogni bipolo del circuito, ad esempio, la convenzione dell’utente. Quando si fa questa scelta, non occorre orientare ulteriormente il grafo (per le tensioni): è sufficiente averlo orientato per le intensità di corrente.

Si noti che, se in luogo del grafo di Figura 3.2b se ne sceglie un altro che differisca dal primo per il fatto che ciascuno dei lati sia stato deformato ad arbitrio (purché senza “lacerazione”), le equazioni di Kirchhoff per le correnti e

¹ Eulero scrisse il primo lavoro sulla teoria dei grafi nel 1736; in questo lavoro Eulero trattò il problema del ponte di Königsberg. Nel 1847 Kirchhoff ha fondato la teoria dei grafi, così come è nota oggi, nei suoi studi sui circuiti elettrici. La maggior parte delle proprietà topologiche dei circuiti elettrici sono state trovate da Kirchhoff e da Maxwell (1892). L’applicazione sistematica dei grafi allo studio dei circuiti elettrici è più recente (1957).

per le tensioni conservano ancora la stessa forma. Per questo motivo, si è soliti dire che il grafo di una rete non ha significato geometrico (il che implicherebbe la conservazione di distanze e angoli rispetto al circuito di partenza), bensì soltanto significato “topologico” (il che implica soltanto la conservazione dei collegamenti fra i diversi nodi).

In conclusione, il modo in cui i bipoli di un circuito sono collegati tra loro può essere rappresentato tramite un oggetto astratto: il *grafo del circuito*. Questo oggetto è “formato” dall’insieme dei nodi e dei lati del circuito e dalla relazione, detta *relazione di incidenza*, che a ogni lato fa corrispondere la coppia di nodi nei quali quel lato (bipolo) incide. Di solito, il grafo è rappresentato graficamente attraverso elementi geometrici: il nodo è rappresentato da un punto e il lato da un arco di linea.

3.3 Elementi di topologia dei circuiti: albero, coalbero, maglia, anello

Per studiare le proprietà dei circuiti che dipendono solo dalle caratteristiche delle connessioni c’è bisogno di alcuni elementi di base della teoria dei grafi. Nel riportarli useremo dei termini che è importante definire subito.

Definizioni: grafo, grafo orientato, sottografo

- Un *grafo* $G(N,L)$ è costituito dall’insieme di n *nod*i, che indicheremo con $N = \{“1”, “2”, \dots, “n”\}$, dall’insieme di l *lat*i (bipoli), che indicheremo con $L = \{1, 2, \dots, l\}$, e dalla *relazione di incidenza* che a ogni lato (bipolo) fa corrispondere la coppia di nodi nei quali quel lato incide. Per convenzione, ciascun lato del grafo di un circuito è orientato con la freccia che indica il verso di riferimento dell’intensità della corrente che attraversa il corrispondente bipolo.
- Se ogni lato (bipolo) del grafo è *orientato* il grafo si dice *orientato*.
- Si consideri un grafo $G(N,L)$. Il grafo $G_1(N,L)$ si dice *sottografo* di $G(N,L)$, se N_1 è un sottoinsieme di N , L_1 è sottoinsieme di L e la relazione di incidenza tra i nodi di N_1 e i lati di L_1 è la stessa relazione che si ha nel grafo $G(N,L)$.



In Figura 3.3a è illustrato un grafo non orientato, e in Figura 3.3b è illustrato lo stesso grafo ma orientato. In Figura 3.4 un grafo orientato, insieme con tre sottografi, è illustrato. Un sottografo è una parte di un grafo, e quindi corrisponde a una parte del circuito.

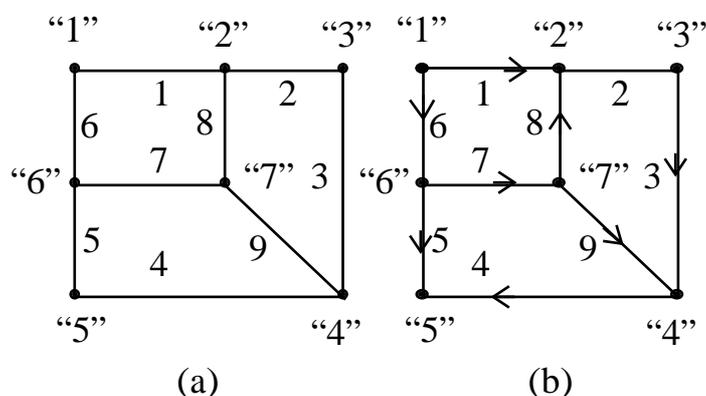


Fig. 3.3 (a) un grafo $G(N,L)$: $N = \{“1”, “2”, \dots, “6”\}$, $L = \{1, 2, \dots, 9\}$; (b) una possibile orientazione del grafo $G(N,L)$.

Un concetto fondamentale nella teoria dei grafi è quello di *grafo connesso*.

Definizione: grafo connesso

Un grafo si dice connesso se ogni nodo è collegato a qualsiasi altro nodo attraverso uno o più lati.

Un grafo si dice ridotto se tra due nodi qualsiasi non vi è più di un solo collegamento.

Un grafo si dice completo se ogni nodo è direttamente collegato a tutti gli altri. Il numero di lati di un grafo ridotto e completo è $n(n-1)/2$.

◆

In Figura 3.5a è illustrato un grafo connesso e in Figura 3.5b è illustrato un esempio di grafo non connesso: ad esempio, il nodo “1” non è collegato al nodo “5”.

I circuiti di bipoli di interesse nelle applicazioni sono tutti connessi, e quindi considereremo solo grafi connessi. Un grafo connesso può contenere sottografi non connessi (si consideri, ad esempio, il grafo G illustrato in Figura 3.4 e il sottografo G_3). Circuiti di interesse con grafi non connessi sono i circuiti che contengono elementi con più di due terminali, come, ad esempio, doppi bipoli. Analizzeremo nel Capitolo 4 queste situazioni.

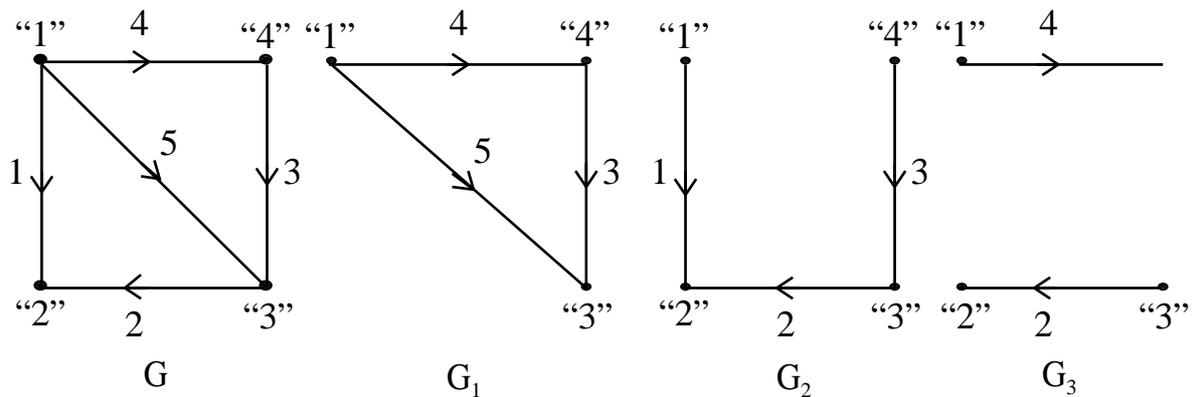


Fig. 3.4 Grafo e alcuni suoi sottografi (orientati).

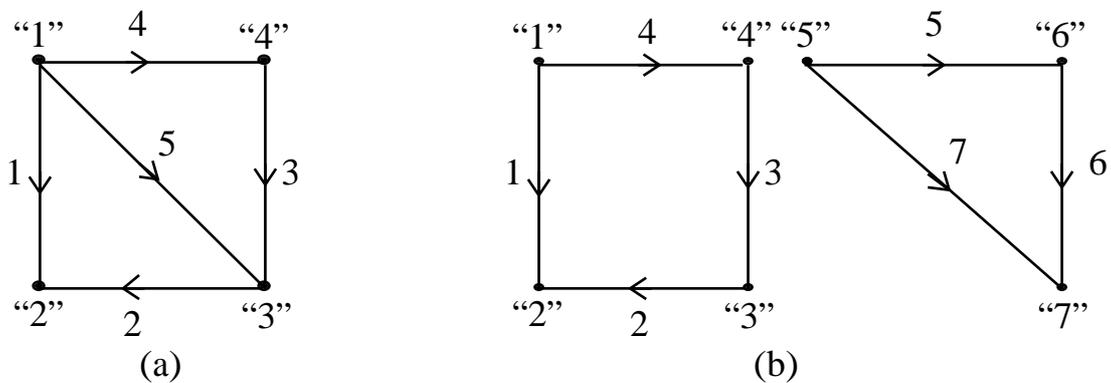


Fig. 3.5 (a) grafo connesso; (b) grafo non connesso.

Il concetto di maglia, che è stato introdotto nel precedente capitolo, quando abbiamo formulato la legge di Kirchhoff per le tensioni, è anche un concetto fondamentale della teoria dei grafi.

Definizione: maglia

Sia dato un grafo connesso G . Una *maglia* di G è un sottografo connesso in cui in ciascun nodo incidono due e solo due lati.

◆

Ogni maglia forma un percorso chiuso, perché essa deve essere un sottografo connesso in cui in ogni nodo incidono due e due soli lati: percorrendo la maglia ciascun lato e ciascun nodo vengono incontrati una e una sola volta. Questa è la proprietà fondamentale di ogni maglia. Una *maglia orientata* è una maglia a cui è associata un verso di percorrenza.

In generale, in un grafo ci sono più maglie. In Figura 3.6 sono riportate tutte le possibili maglie del grafo G di Figura 3.4. I sottografi G_4 e G_5 dello stesso grafo G , riportati in Figura 3.7, non sono maglie perché nei nodi “3” e “4” di G_4 incide solo un lato e nel nodo “1” di G_5 incidono tre lati.

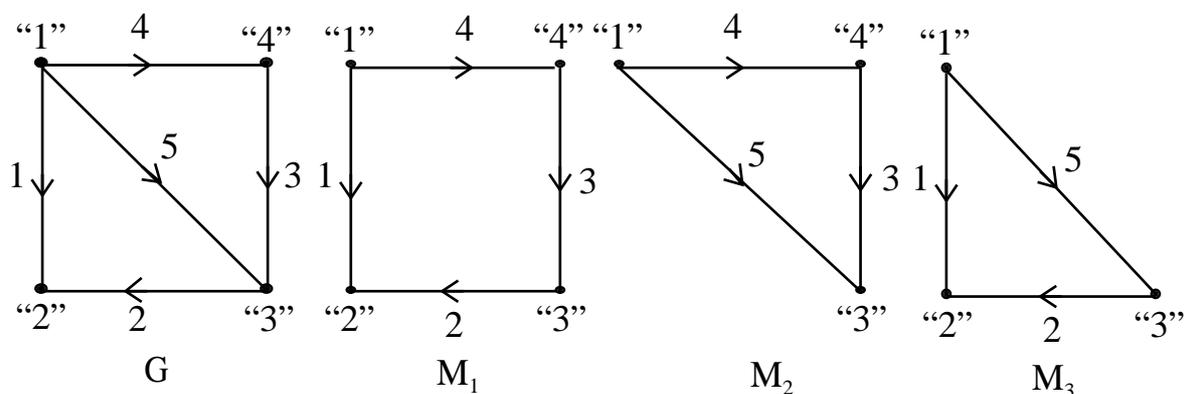


Fig. 3.6 *Le maglie del grafo G .*

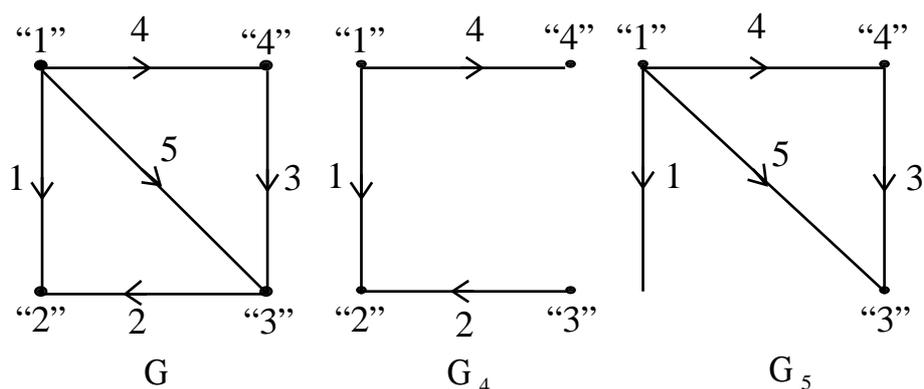


Fig. 3.7 *Esempi di sottografi di G che non sono maglie di G .*

Oltre alle maglie, ci sono altri sottografi che hanno proprietà interessanti e che saranno utilizzati nella teoria dei circuiti: essi sono gli *alberi* e i *coalberi* di un grafo.

Definizioni: albero, coalbero

- Sia dato un grafo connesso G . Un albero A di G è un suo sottografo connesso costituito da tutti i nodi del grafo e che non contiene maglie.
- Il coalbero CA di G , corrispondente all'albero A , è l'insieme dei lati complementare a quelli dell'albero: l'unione dei lati dell'albero e del coalbero coincide con l'insieme di tutti i lati di G .

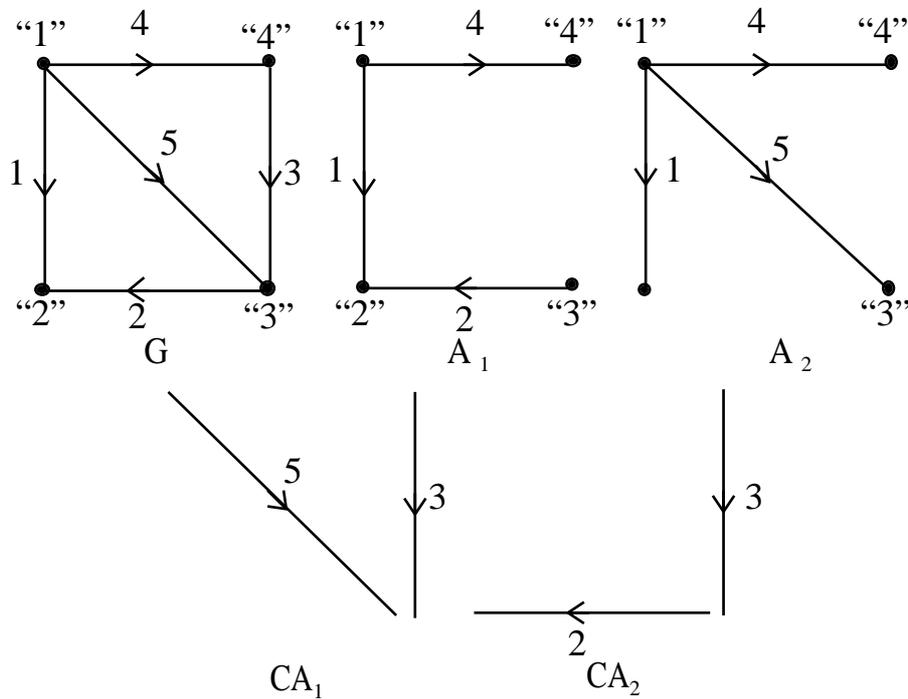


Fig. 3.8 Esempi di alberi, A_1 , A_2 , e coalberi, CA_1 , CA_2 , del grafo G .

In generale un grafo possiede più di un albero. Due alberi, A_1 , A_2 e i relativi coalberi, CA_1 , CA_2 del grafo G riportato in Figura 3.4, sono illustrati in Figura 3.8. Il sottografo G_3 del grafo G riportato in Figura 3.9 non è un albero perché contiene una maglia, e così, anche il sottografo G_4 non è un albero perché non è connesso.

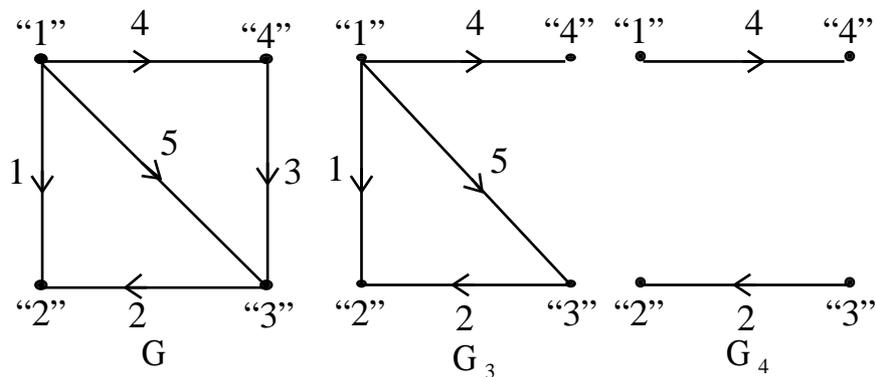


Fig. 3.9 Esempi di sottografi di G che non sono alberi di G .

Proprietà fondamentale degli alberi di un grafo connesso

Si consideri un grafo connesso G con n nodi e l lati. Ciascun albero del grafo G è costituito da $(n-1)$ lati (indipendentemente dal numero di lati del grafo e dalla relazione di incidenza).



La dimostrazione di questa proprietà è semplice. Si parta da un qualsiasi nodo dell'albero. È possibile raggiungere, percorrendo l'albero, qualsiasi altro nodo. Ogni volta che si raggiunge un altro nodo si percorre un nuovo lato; pertanto il numero totale di lati distinti che bisogna percorrere per raggiungere tutti i nodi è $(n-1)$, cioè è uguale al numero di nodi meno uno (quello di partenza).

Da questa proprietà segue anche che, per ogni grafo connesso con n nodi e l lati (bipoli) deve essere necessariamente $l > (n-1)$.

Proprietà fondamentale del coalbero di un grafo connesso

Si consideri un grafo connesso G con n nodi e l lati. Ciascun coalbero del grafo G è costituito da $[l - (n-1)]$ lati (indipendentemente dalla relazione di incidenza del grafo).



Questa proprietà deriva direttamente dal fatto che il coalbero è il complemento all'albero, cioè la somma dei lati dell'albero e del coalbero deve essere uguale al numero dei lati del grafo.

Tra tutte le possibili maglie di un grafo c'è ne sono alcune che hanno una proprietà molto interessante: attraverso queste maglie, che ora individueremo, è possibile rappresentare tutte le possibili maglie del grafo.

Si consideri un grafo connesso G con n nodi e l lati. Si scelga un albero A . Per ciascun lato del coalbero CA (corrispondente all'albero scelto) esiste una e una sola maglia costituita dal suddetto lato di coalbero e da rami dell'albero.

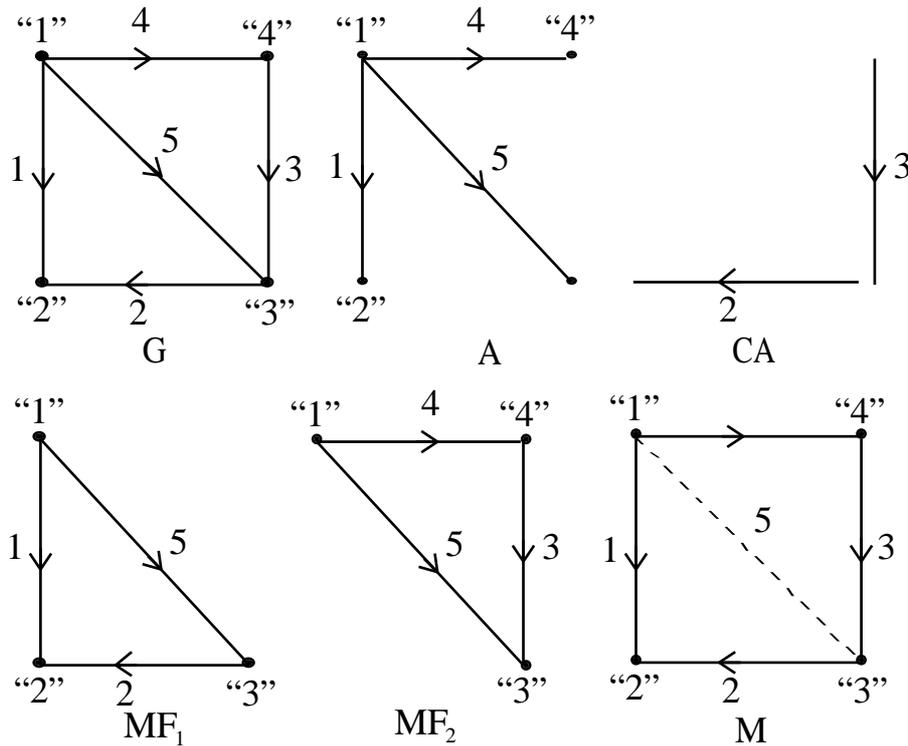


Fig. 3.10 Grafo G , un albero A e corrispondente coalbero CA ; l'insieme delle maglie fondamentali del coalbero CA ; la maglia M è "unione" delle maglie fondamentali MF_1 e MF_2 .

Definizione: maglia fondamentale

- Si consideri il sottografo che si ottiene aggiungendo all'albero A un solo lato del coalbero CA : esso contiene una e una sola maglia, che si ottiene eliminando tutti i lati "appesi", cioè tutti quei lati che non appartengono al percorso chiuso. Una maglia ottenuta in questo modo prende il nome di *maglia fondamentale* del coalbero CA .

◆

È evidente, allora, che aggiungendo un lato di coalbero per volta è possibile costruire $[l - (n - 1)]$ maglie fondamentali distinte. Questo insieme di maglie prende il nome di *insieme delle maglie fondamentali* del coalbero CA del grafo G . A ciascun coalbero corrisponde un diverso insieme di maglie fondamentali.

La proprietà dell'*insieme delle maglie fondamentali* di un coalbero è che ogni lato di coalbero appartiene a una e una sola maglia fondamentale dell'insieme e, quindi, ogni maglia dell'insieme delle maglie fondamentali ha almeno un lato

in esclusiva. In questo senso possiamo allora dire che l'insieme delle maglie fondamentali di un coalbero sono tra loro indipendenti.

Si consideri ora l'insieme di maglie fondamentali di un coalbero del grafo G . Si può verificare che una qualsiasi altra maglia del grafo può essere rappresentata tramite "l'unione" di maglie fondamentali. La regola dell'unione deve prevedere che:

- (i) le maglie abbiano almeno un lato in comune ;
- (ii) i lati in comune si elidano a vicenda.

In Figura 3.10 è illustrato un grafo e un possibile insieme di maglie fondamentali (MF_1 è la maglia fondamentale ottenuta aggiungendo all'albero A il lato 2 e MF_2 è quella ottenuta aggiungendo il lato 3; la maglia M è ottenuta "unendo" MF_1 a MF_2).

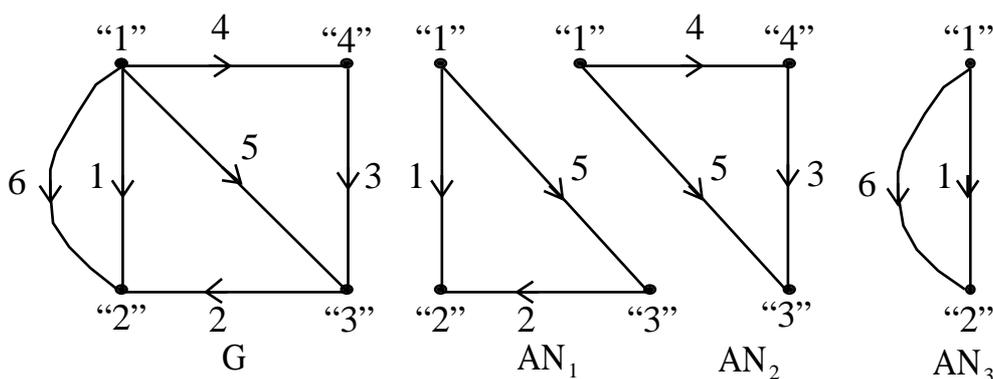


Fig. 3.11 Grafo planare e anelli corrispondenti.

Tutti i circuiti che vengono considerati in questo corso hanno grafi planari. Fino ad ora abbiamo considerato solo grafi di questo tipo.

Definizione: grafo planare

- Un grafo si dice *planare* se può essere tracciato su di un piano senza che nessuna coppia di lati si intersechi in un punto che non sia un nodo.

◆

In Figura 3.11 è riportato un esempio di grafo planare. In Figura 3.12a è riportato un esempio di grafo non planare. Se si prova a distendere questo grafo

su di un piano, il lato 1, che collega il nodo "5" al nodo "3", interseca almeno un altro lato in un punto diverso dai nodi (Figura 3.12b).

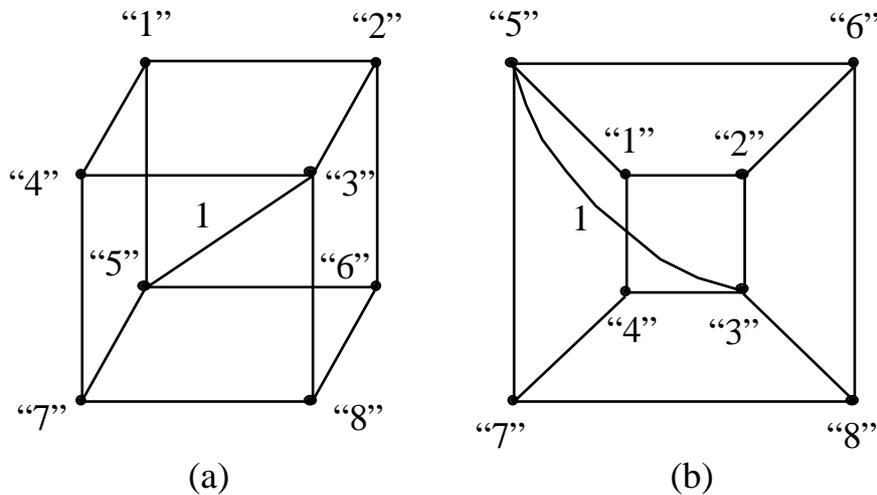


Fig. 3.12 (a) Esempio di grafo non planare; (b) lo stesso grafo disteso su di un piano.

Per i grafi planari ogni maglia partiziona il piano in due regioni, quella interna al cammino chiuso e quella esterna. Tra tutte le possibili maglie di un grafo planare, rivestono particolare interesse quelle che non contengono nessun lato al loro interno.

Definizione: anello

- Un anello è una maglia di un grafo planare che non contiene lati al suo interno.

◆

Proprietà fondamentale degli anelli di un grafo planare

Si consideri un grafo planare connesso G con n nodi e l lati. Il grafo G ha $[l - (n - 1)]$ anelli.

◆

Gli anelli di un grafo planare sono maglie tra loro indipendenti. Qui il concetto di indipendenza sta a significare che non è possibile ottenere uno qualsiasi degli $[l - (n - 1)]$ anelli dall'unione, secondo la regola che abbiamo appena enunciato, degli $[l - (n - 1)] - 1$ anelli restanti. Questa nuova accezione del concetto di

indipendenza comprende quello che abbiamo appena introdotto quando abbiamo considerato l'insieme delle maglie fondamentali di un coalbero. Non dimostreremo questa proprietà. Può essere facilmente verificata per induzione. L'insieme di tutti gli anelli di un grafo planare ha la stessa proprietà di un insieme di maglie fondamentali: qualsiasi altra maglia del grafo planare può essere ottenuta dall'unione di due o più anelli. In Figura 3.11 sono riportati tutti gli anelli, AN_1 , AN_2 e AN_2 del grafo planare G .

A differenza dell'insieme di maglie fondamentali, che dipende dalla scelta dell'albero, l'insieme degli anelli di un grafo planare è unico.

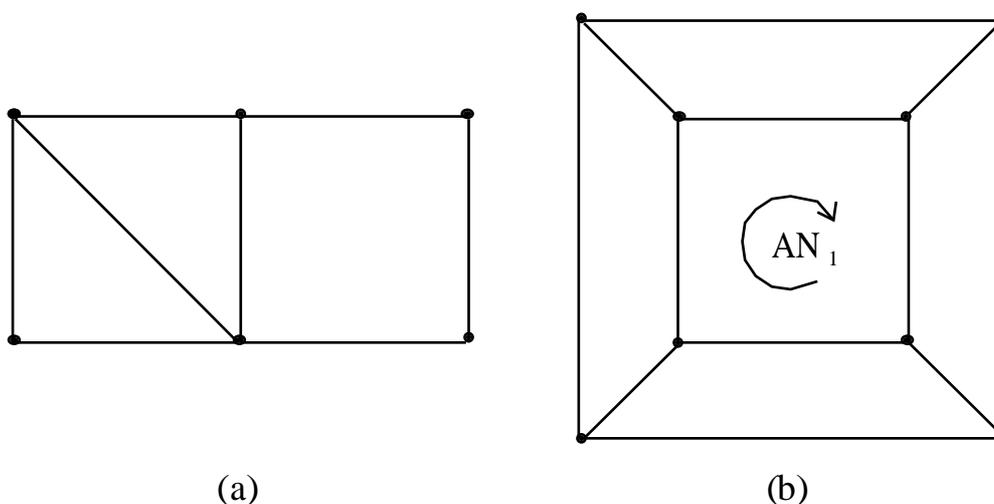


Fig. 3.13 (a) Gli anelli di questo grafo sono un insieme di maglie fondamentali; (b) gli anelli di questo grafo non sono un insieme di maglie fondamentali.

Osservazione

In generale, gli anelli di un grafo planare non costituiscono un insieme di maglie fondamentali. Gli anelli del grafo planare di Figura 3.13a sono anche un insieme di maglie fondamentali. Il lettore lo dimostri individuando l'albero e, quindi, il coalbero a cui tale insieme corrisponde. Invece, gli anelli del grafo planare di Figura 3.13b non sono un insieme di maglie fondamentali. La ragione è molto semplice: l'anello interno AN_1 non ha nessun lato in esclusiva pur essendo indipendente da tutti gli altri anelli del grafo.

3.4 Insiemi di taglio

Un altro importante concetto della teoria dei grafi (e quindi della teoria dei circuiti) è l'insieme di taglio.

Definizione: insieme di taglio

- Si consideri un grafo connesso $G(N,L)$. Un sottoinsieme T dei lati L del grafo, si dice *insieme di taglio* se:
 - (a) la rimozione dal grafo di tutti i lati dell'insieme di taglio conduce a un grafo non connesso;
 - (b) il ripristino di uno qualsiasi dei lati dell'insieme di taglio riconnette i due sottografi.

Se il grafo è orientato, l'insieme di taglio si dice orientato.



In Figura 3.14 è illustrato un grafo e i possibili insiemi di taglio, T_1 , T_2 , T_3 e T_4 . I lati di T_2 sono tutti quelli che incidono nel nodo "2" e i lati di T_3 sono tutti quelli che incidono nel nodo "3"; invece i lati degli insiemi T_1 e T_4 non incidono in uno stesso nodo.

Ciascun insieme di taglio crea una partizione dell'insieme dei nodi N del grafo $G(N,L)$ in due sotto insiemi, uno che denomineremo sottoinsieme N_+ e l'altro che denomineremo sottoinsieme N_- . Di conseguenza, ciascun insieme di taglio può essere orientato scegliendo arbitrariamente un verso, ad esempio, quello che va dal sottoinsieme di nodi N_+ al sottoinsieme N_- .

La legge di Kirchhoff per le correnti, per come è stata formulata, impone un legame alle intensità di corrente dei bipoli (lati) che incidono in uno stesso nodo. È possibile formularla anche per le intensità di corrente dei bipoli (lati) di un insieme di taglio che, in generale, non incidono in uno stesso nodo.

Equazioni di Kirchhoff per gli insiemi di taglio

La somma algebrica delle intensità di corrente dei bipoli che formano un insieme di taglio è uguale a zero in ogni istante.

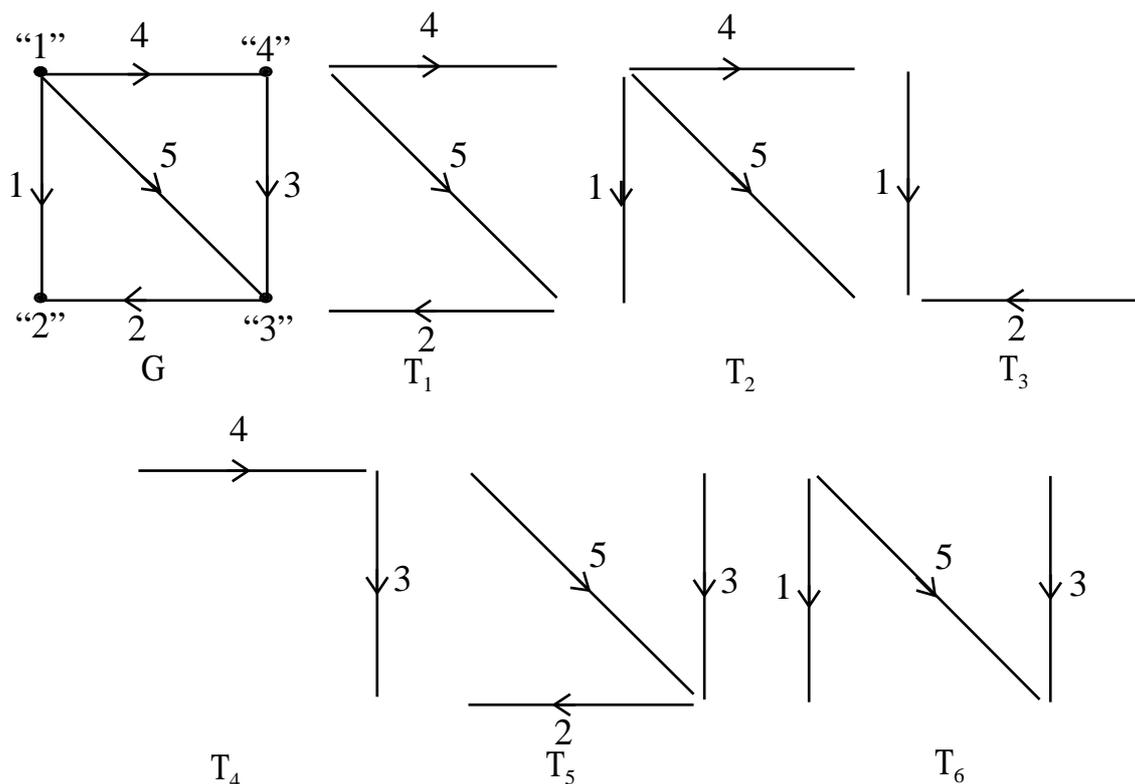


Fig. 3.14 Possibili insiemi di taglio del grafo G .

In Figura 3.14 è illustrato un grafo e i possibili insiemi di taglio, T_1 , T_2 , T_3 e T_4 . I lati di T_2 sono tutti quelli che incidono nel nodo "2" e i lati di T_3 sono tutti quelli che incidono nel nodo "3"; invece i lati degli insiemi T_1 e T_4 non incidono in uno stesso nodo.

Ciascun insieme di taglio crea una partizione dell'insieme dei nodi N del grafo $G(N,L)$ in due sotto insiemi, uno che denomineremo sottoinsieme N_+ e l'altro che denomineremo sottoinsieme N_- . Di conseguenza, ciascun insieme di taglio può essere orientato scegliendo arbitrariamente un verso, ad esempio, quello che va dal sottoinsieme di nodi N_+ al sottoinsieme N_- .

La legge di Kirchhoff per le correnti, per come è stata formulata, impone un legame alle intensità di corrente dei bipoli (lati) che incidono in uno stesso nodo. È possibile formularla anche per le intensità di corrente dei bipoli (lati) di un insieme di taglio che, in generale, non incidono in uno stesso nodo.

Equazioni di Kirchhoff per gli insiemi di taglio

La somma algebrica delle intensità di corrente dei bipoli che formano un insieme di taglio è uguale a zero in ogni istante.

Nella legge per l'insieme di taglio intervengono con lo stesso segno le intensità di corrente il cui riferimento per il verso è concorde con l'orientazione dell'insieme di taglio e con il segno contrario le intensità di corrente con riferimento opposto. Ad esempio, l'intensità di corrente i_k deve essere sommata con il segno + se il suo verso di riferimento per va dal sottoinsieme di nodi N_+ al sottoinsieme N_- e con il segno - nel caso contrario.

La dimostrazione di questa nuova formulazione della legge di Kirchhoff per le correnti è semplice. Ogni insieme di taglio partiziona l'insieme di nodi nei due sotto insiemi N_+ e N_- . Scrivendo le equazioni di Kirchhoff per le correnti per ciascun nodo del sottoinsieme N_+ e sommandole membro a membro si ottiene l'equazione dell'insieme di taglio. Nella somma si eliminano tutte le intensità di corrente relative ai lati che collegano i nodi del sottoinsieme N_+ e restano solo le intensità di corrente relative ai lati che collegano i nodi di N_+ ai nodi di N_- . Tutte le intensità di corrente i cui riferimenti per i versi vanno dal sottoinsieme N_+ al sottoinsieme N_- intervengono nella somma con lo stesso segno e con il segno contrario le intensità di corrente con riferimento opposto. (Si noti che quando N_+ contiene un solo nodo e ciò accade quando i lati dell'insieme di taglio incidono tutti in un solo nodo, l'equazione per l'insieme di taglio si riduce a quella per il nodo).

Le equazioni per le intensità di corrente degli insiemi di taglio illustrati in Figura 3.14 sono riportate in Tabella 2.4.

insieme di taglio	equazione per le intensità di corrente
T_1	$-i_2 + i_4 + i_5 = 0$
T_2	$i_1 + i_4 + i_5 = 0$
T_3	$i_1 + i_2 = 0$
T_4	$i_3 - i_4 = 0$
T_5	$-i_2 + i_3 + i_5 = 0$
T_6	$i_1 + i_3 + i_5 = 0$

Tab. 2.4 *Equazioni per gli insiemi di taglio riportati in Figura 3.14*

3.5 Matrice di incidenza, matrice di maglia ed equazioni di Kirchhoff

Fino a questo momento la relazione di incidenza di un grafo orientato, cioè la legge di corrispondenza che associa i lati ai nodi, è stata rappresentata graficamente attraverso elementi geometrici.

3.5.1 Matrice di incidenza

Si consideri un grafo orientato G costituito da n nodi e l lati. È possibile assegnare la relazione di incidenza del grafo G utilizzando una tabella ordinata costituita da n righe, quanto sono i nodi, e l colonne, quanti sono i lati, cioè una matrice rettangolare $n \times l$ (in un grafo connesso è sempre $l \geq n - 1$). A questa matrice si dà il nome di *matrice di incidenza* del grafo (circuito) ed è indicata con A_a . Essa è così definita.

Si ordinino i nodi e i lati del grafo orientato associando a ciascuno di essi un numero naturale: da 1 a n per i nodi e da 1 a l per i lati. La i -esima riga della matrice di incidenza corrisponda al i -esimo nodo del grafo e lo j -esimo elemento di questa riga corrisponda al j -esimo lato del grafo. L'elemento a_{ij} di A_a (appartenente alla riga i e alla colonna j), è così definito:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il lato } j \text{ esce dal nodo " } i \text{";} \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ entra nel nodo " } i \text{";} \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non incide nel nodo " } i \text{".} \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, l \end{matrix} \quad (1)$$

Gli elementi $+1$ e -1 della i -esima riga di A_a indicano quali sono i lati che incidono nell' i -esimo nodo del grafo; essi possono essere due o più di due, in generale. Gli elementi $+1$ e -1 della j -esima colonna indicano quali sono i due nodi nei quali incide il lato " j ".

Si consideri il circuito illustrato in Figura 3.15a; il corrispondente grafo orientato è illustrato in Figura 3.15b. Costruiamo la matrice di incidenza. In questo caso essa ha 4 righe (4 sono i nodi del circuito) e 5 colonne (5 sono i bipoli del circuito). La matrice di incidenza è:

$$A_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (\Leftarrow \text{nodo "1"}) \\ (\Leftarrow \text{nodo "2"}) \\ (\Leftarrow \text{nodo "3"}) \\ (\Leftarrow \text{nodo "4"}) \end{array} \quad (2)$$

C'è una corrispondenza biunivoca tra il "disegno" illustrato in Figura 3.15a, che rappresenta il modo in cui i bipoli sono collegati tra loro nel circuito in esame, il disegno del corrispondente grafo orientato riportato in Figura 3.15b e la matrice di incidenza (2): essi sono una diversa rappresentazione della relazione di incidenza che descrive come i bipoli del circuito incidono nei nodi e, quindi, come sono collegati tra loro.

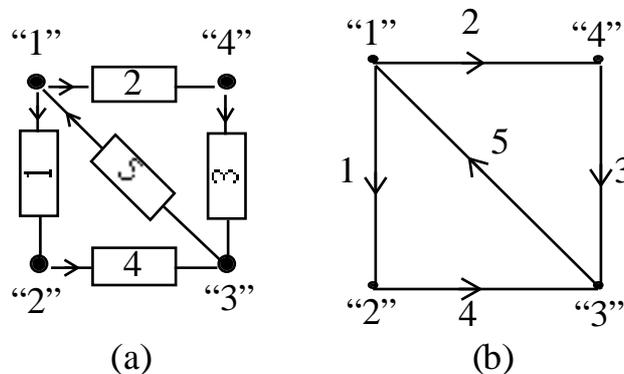


Fig. 3.15 (a) Circuito di bipoli orientato; (b) grafo orientato corrispondente.

Siccome ogni lato è collegato a due soli nodi, solo due elementi di ciascuna colonna della matrice di incidenza sono diversi da zero: uno di essi vale +1 (corrisponde al nodo dal quale la punta della freccia del lato orientato esce) e l'altro vale -1 (corrisponde al nodo nel quale la punta della freccia del lato orientato entra). Dunque, in ciascuna colonna della matrice di incidenza abbiamo un solo +1, un solo -1 e gli altri elementi sono tutti nulli. Ne consegue che la somma di tutte le righe della matrice di incidenza è la riga identicamente nulla (cioè una riga con tutti zeri) e quindi le righe di A_a sono linearmente dipendenti: di conseguenza il rango di A_a è minore di n^2 . Ad esempio, l'ultima riga della matrice (2) può essere ottenuta, senza ispezionare il

² Le righe di una matrice sono linearmente dipendenti se almeno una riga della matrice può essere espressa come combinazione lineare delle altre. Il rango di una matrice può essere definito come l'ordine massimo dei minori non nulli della matrice. Di conseguenza, il rango di una matrice rappresenta il massimo numero di colonne e, quindi, di righe linearmente indipendenti.

grafo, a partire dalle altre tre righe, imponendo che la somma di tutte e quattro le righe dia una riga identicamente nulla.

Osservazione

La matrice di incidenza ha una proprietà molto interessante che enunceremo ma non dimostreremo: $(n-1)$ lati corrispondenti a $(n-1)$ colonne di A_a linearmente indipendenti (ogni colonna è associata a un lato) formano un albero (un albero è definito univocamente se si assegnano gli $(n-1)$ lati che lo compongono). Questa proprietà può essere utilizzata per realizzare procedure automatiche al calcolatore per individuare gli alberi e, quindi, i coalberi di un grafo. Ciò consente di individuare automaticamente un insieme di maglie fondamentali e, quindi, tutte le maglie di un grafo.



La matrice di incidenza è importante, non solo perché attraverso di essa è possibile rappresentare in maniera estremamente semplice e sintetica la relazione di incidenza del grafo di un circuito (particolarmente adatta ad essere assemblata ed elaborata attraverso algoritmi automatici realizzati utilizzando calcolatori elettronici), ma soprattutto perché attraverso di essa è possibile scrivere automaticamente le equazioni di Kirchhoff per le correnti. Come vedremo, in seguito, attraverso la matrice di incidenza è possibile imporre, in modo estremamente semplice, elegante ed efficiente, anche le equazioni di Kirchhoff per le tensioni. La matrice di incidenza di un circuito contiene tutte le informazioni di cui c'è bisogno per imporre le leggi di Kirchhoff.

Si consideri il circuito di bipoli riportato in Figura 3.15. Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti ai nodi del circuito si ha l'insieme di equazioni

$$\begin{aligned}
 \text{nodo "1"} \quad & i_1 + i_2 + 0 \cdot i_3 + 0 \cdot i_4 + -i_5 = 0, \\
 \text{nodo "2"} \quad & -i_1 + 0 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3 + i_4 + 0 \cdot i_5 = 0, \\
 \text{nodo "3"} \quad & 0 \cdot i_1 + 0 \cdot i_2 + -i_3 + -i_4 + i_5 = 0, \\
 \text{nodo "4"} \quad & 0 \cdot i_1 + -i_2 + i_3 + 0 \cdot i_4 + 0 \cdot i_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Questo insieme di equazioni può essere riscritto, utilizzando il prodotto riga per colonna tra una matrice e un vettore colonna, nella seguente forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

La prima equazione del sistema (3) è ottenuta moltiplicando la prima riga della matrice rettangolare 4×5 per il vettore colonna con 5 righe (matrice rettangolare 5×1), e imponendo, poi, che tale prodotto sia zero; la seconda equazione è ottenuta moltiplicando la seconda riga della matrice rettangolare 4×5 per il vettore colonna, e imponendo, ancora, che il prodotto sia zero, e così via.

La matrice 4×5 che compare nell'equazione matriciale (4) è proprio la matrice di incidenza del grafo orientato del circuito riportato in Figura 3.15b, la cui espressione è data dalla (2). Se si introduce il vettore colonna rappresentativo delle intensità di corrente del circuito ³,

$$\mathbf{i} = |i_1, i_2, i_3, i_4, i_5|^T, \quad (5)$$

e il vettore colonna nullo

$$\mathbf{0} = |0, 0, 0, 0, 0|^T, \quad (6)$$

il sistema di equazioni (4) può essere riscritto, in forma sintetica, come:

$$\mathbf{A}_a \mathbf{i} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

In conclusione, l'insieme di tutte le equazioni di Kirchhoff per le correnti (equazioni per i nodi) del circuito possono essere ottenute moltiplicando la matrice di incidenza del circuito per il vettore colonna rappresentativo delle intensità di corrente del circuito e imponendo che tale prodotto sia il vettore colonna identicamente nullo.

³ Per ridurre l'ingombro rappresenteremo i vettori colonna come vettori riga trasposti. In generale, con il simbolo \mathbf{C}^T si intende la matrice trasposta della matrice \mathbf{C} . Nel caso particolare in cui \mathbf{C} è un vettore riga, cioè una matrice con una sola riga, la trasposta è un vettore colonna, cioè una matrice con una sola colonna.

Questo risultato è del tutto generale, non vale solo per l'esempio che abbiamo appena considerato. Si consideri un generico circuito con l lati e n nodi e utilizzando i numeri naturali si ordinino i nodi da 1 a n e i lati da 1 a l . Introduciamo il vettore colonna rappresentativo delle intensità di corrente del circuito,

$$\mathbf{i} = [i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, i_l]^T; \quad (8)$$

esso ha l righe. Siccome gli elementi $+1$ e -1 di una riga di \mathbf{A}_a indicano i lati orientati che incidono nel nodo corrispondente, il prodotto scalare della riga per il vettore colonna \mathbf{i} coincide con la somma algebrica delle intensità di corrente incidenti il nodo. Allora, il prodotto, riga per colonna, tra la prima riga di \mathbf{A}_a e il vettore \mathbf{i} è uguale alla somma algebrica delle intensità di corrente incidenti nel nodo "1"; il prodotto, riga per colonna, tra la seconda riga della matrice \mathbf{A}_a e il vettore \mathbf{i} è uguale alla somma algebrica delle intensità di corrente incidenti nel nodo "2"; e così via, fino al prodotto dell'ennesima riga della matrice \mathbf{A}_a per il vettore colonna \mathbf{i} . Siccome per la legge di Kirchhoff delle correnti la somma algebrica delle intensità di corrente incidenti in ciascun nodo deve essere uguale a zero, si ottiene di nuovo l'equazione (7) (in generale, $\mathbf{0}$ è il vettore colonna identicamente nullo di dimensione l). Dunque la conoscenza della matrice di incidenza consente di determinare immediatamente le equazioni di Kirchhoff per le correnti per tutti i nodi del circuito.

Osservazione: matrici sparse

La metà degli elementi della matrice di incidenza (2) sono nulli. In generale, il numero di elementi diversi da zero di una matrice di incidenza è uguale a $2l$, mentre il numero totale degli elementi è $n \times l$, quindi il numero degli elementi uguali a zero è $(n-2) \times l$. Se $n \gg 1$, la maggior parte degli elementi della matrice sono nulli, e quindi sono in un certo senso "ridondanti". Le matrici in cui la maggior parte degli elementi sono nulli prendono il nome di *matrici sparse*. Quale sia la percentuale di elementi necessaria per fare ritenere una matrice sparsa, dipende, ovviamente dal contesto.

Lavorare con matrici sparse è un notevole vantaggio nell'elaborazione automatica delle equazioni circuitali tramite calcolatori, dal momento che memorizzando solo gli elementi diversi da zero, si possono ottenere notevoli risparmi di memoria e di operazioni e, quindi, di tempo.

3.5.2 Matrice delle maglie

Le maglie orientate di un grafo possono essere descritte attraverso una relazione analoga a quella di incidenza, che associa a ciascuna maglia i lati che la compongono. Questa relazione, così come quella di incidenza, può essere rappresentata attraverso una matrice, detta *matrice delle maglie*: le righe sono associate alle maglie (e sono tante quante sono le maglie distinte del grafo; le colonne sono associate ai lati e sono tante quante sono i lati del grafo). Si indichi con m il numero di maglie distinte del grafo (sarà sempre $m < l$), le si ordinino associando a ciascuna di esse un numero naturale e le si orientino assegnando (in maniera arbitraria) un verso di percorrenza. La i -esima riga è associata alla i -esima maglia e la j -esima colonna è associata al j -esimo lato. Il generico elemento b_{ij} della matrice delle maglie è così definito ($i = 1, m; j = 1, l$):

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{lato } j \text{ appartiene alla maglia } i \text{ e i versi sono concordi;} \\ -1 & \text{lato } j \text{ appartiene alla maglia } i \text{ e i versi sono discordi;} \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non appartiene alla maglia } i. \end{cases} \quad (9)$$

Si consideri di nuovo il circuito illustrato in Figura 3.15a e si costruisca la matrice delle maglie. Prima di tutto bisogna individuare le maglie. In questo caso le possibili maglie sono 3 e sono riportate in Figura 3.16. Quindi, la matrice delle maglie ha 3 righe (quante sono le maglie distinte) e 5 colonne (quanti sono i lati). Essa vale

$$\mathbf{B}_a = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ \text{maglia M1,} \\ \text{maglia M2,} \\ \text{maglia M3.} \end{array} \quad (10)$$

Le righe della matrice delle maglie sono linearmente dipendenti tra loro. Infatti, se si sottrae alla prima riga della matrice (10) la seconda e la terza si ottiene la riga identicamente nulla. Dunque, anche la matrice delle maglie non è a rango massimo. Ciò è una proprietà generale ed è conseguenza del fatto che, se si considerano tutte le maglie di un grafo, esse non sono tutte indipendenti tra loro: solo $l - (n - 1)$ sono indipendenti (un insieme di maglie fondamentali o l'insieme degli anelli).

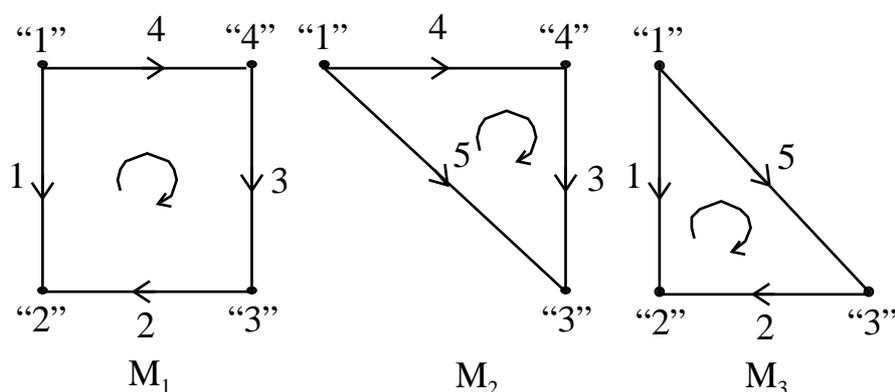


Fig. 3.16 *Maglie (orientate) del circuito riportato in Figura 3.15a.*

Così come la matrice di incidenza consente di esprimere le equazioni di Kirchhoff per le correnti per tutti i nodi del circuito, la matrice delle maglie consente di esprimere le equazioni di Kirchhoff per le tensioni per tutte le maglie del circuito. Si consideri, ora, l'insieme delle equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni alle maglie riportate in Figura 3.16,

$$\begin{array}{lcl}
 \text{maglia M1} & -v_1 + & v_2 + v_3 + v_4 + 0 \cdot v_5 = 0, \\
 \text{maglia M2} & 0 \cdot v_1 + & 0 \cdot v_2 + v_3 + v_4 - v_5 = 0, \\
 \text{maglia M3} & -v_1 + & v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + v_5 = 0.
 \end{array} \quad (11)$$

È evidente che il sistema di equazioni (11) può essere riscritto nella forma

$$\mathbf{B}_a \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

dove \mathbf{B}_a è la matrice delle maglie (10), \mathbf{v} è il vettore colonna rappresentativo delle tensioni

$$\mathbf{v} = |v_1, v_2, v_3, v_4, v_5|^T, \quad (13)$$

e $\mathbf{0}$ è il vettore colonna identicamente nullo di dimensione 5.

Ovviamente, questo modo di rappresentare le equazioni di Kirchhoff per le tensioni è del tutto generale e non dipende dal particolare circuito in esame. Tuttavia, facciamo subito notare che per costruire la matrice delle maglie bisogna prima determinare tutte le maglie del grafo. Come abbiamo appena accennato esiste una procedura generale per fare questo. Essa si basa sulla

ricerca automatica di un albero del circuito, ma è molto onerosa dal punto di vista “computazionale” già per circuiti con poche decine di nodi e di lati.

3.6 Equazioni di Kirchhoff indipendenti

Le equazioni circuitali sono costituite dalle equazioni di Kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali. Le equazioni di Kirchhoff sono algebriche lineari e omogenee. Invece, le equazioni caratteristiche possono essere, in generale, algebriche o differenziali, lineari o non lineari, tempo-invarianti o tempo-varianti, omogenee o non omogenee.

Il sistema di equazioni circuitali è, in generale, ben posto?

Un sistema di equazioni si dice ben posto se ammette una e una sola soluzione, per assegnati termini noti e condizioni iniziali. Condizione necessaria, affinché un sistema sia ben posto, è che le equazioni indipendenti siano tante quante sono le incognite del problema, né di più e né di meno.

Le equazioni (algebriche, differenziali, integrali, ...) di un sistema di equazioni sono dipendenti se almeno una di esse può essere ottenuta combinando le altre o almeno una parte. Invece, le equazioni del sistema sono indipendenti se e solo se tutte le equazioni non sono tra loro dipendenti. Inoltre, affinché un problema sia ben posto non deve mai accadere che due o più equazioni siano tra loro incompatibili ($(x + y) = 1$ e $(-x - y) = 0$ sono un esempio di due equazioni incompatibili).

Se il sistema di equazioni circuitali è costituito da un numero di equazioni indipendenti più grande del numero di incognite o da equazioni incompatibili, il problema in generale non ammette soluzioni. Invece il sistema ha infinite soluzioni se il numero di equazioni indipendenti (tra loro compatibili) è più piccolo del numero di incognite.

Le equazioni caratteristiche sono certamente indipendenti e compatibili tra loro (ogni equazione caratteristica ha due incognite in esclusiva). Le equazioni ottenute applicando le leggi di Kirchhoff sono indipendenti? Sono tra loro compatibili?

3.6.1 Indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le correnti

Si considerino le equazioni di Kirchhoff per le correnti. Analizziamo, come esempio concreto, le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al circuito rappresentato in Figura 3.15a,

$$\begin{aligned}
 \text{nodo "1"} \quad i_1 + i_2 - i_5 &= 0, \\
 \text{nodo "2"} \quad -i_1 + i_4 &= 0, \\
 \text{nodo "3"} \quad -i_3 - i_4 + i_5 &= 0, \\
 \text{nodo "4"} \quad -i_2 + i_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Esse sono linearmente dipendenti. Infatti, sommando membro a membro le 4 equazioni del sistema (14) si ottiene l'identità $0 = 0$ (non più un'equazione)⁴. Ciò è un'immediata conseguenza del fatto che la somma di tutte le righe della matrice di incidenza è la riga identicamente nulla: il rango della matrice di incidenza A_a del circuito di Figura 3.15, data dalla (4), è minore di 4. Pertanto la quarta (o qualsiasi altra) equazione del sistema (14) è una combinazione lineare delle altre tre. Essa può essere ottenuta, prima sommando membro a membro le altre tre, e poi cambiando il segno di entrambi i membri. Dunque tutte le "informazioni" contenute nella quarta (o in qualsiasi altra) equazione del sistema (14) sono già presenti nelle altre tre e, quindi, essa è ridondante.

Questo risultato è del tutto generale. Le n equazioni di Kirchhoff per le correnti (n è il numero di nodi),

$$A_a \mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

di un circuito con grafo connesso sono linearmente dipendenti, qualunque sia il grafo del circuito (se si sommano membro a membro le n equazioni del sistema (15), si ottiene sempre l'identità $0 = 0$). Ciò è sempre conseguenza del fatto che la somma di tutte le righe della matrice di incidenza è la riga identicamente nulla. Questo risultato è in accordo con il fatto che il rango della matrice di incidenza A_a è minore di n . È ovvio, a questo punto, che una qualsiasi

⁴ L'uguaglianza $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ è un'identità se essa verificata per qualsiasi ennupla x_1, x_2, \dots, x_n ; invece, se è verificata solo per alcuni valori di x_1, x_2, \dots, x_n (l'insieme di questi valori può essere finito oppure infinito), allora essa è un'equazione.

equazione del sistema (15), o del sistema (14), può essere eliminata, senza che l'informazione contenuta nel sistema ne risenta in alcun modo.

Quante e quali sono le equazioni di Kirchhoff per le correnti linearmente indipendenti?

Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le correnti

Per un circuito con grafo connesso con n nodi, $n - 1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti, scelte in maniera arbitraria tra le possibili n , sono linearmente indipendenti.



Analizziamo di nuovo, come esempio concreto, le equazioni di Kirchhoff per le correnti del circuito di Figura 3.15a, il sistema (14). Un insieme costituito da tre equazioni del sistema (14), scelte in modo qualsiasi, ad esempio, dalle prime tre equazioni, è un insieme di equazioni linearmente indipendenti. Infatti, le prime due equazioni del sistema (14) non possono essere dipendenti tra loro perché, ad esempio, i_5 compare solo nella prima e non nella seconda. Condizione sufficiente affinché una equazione di un certo insieme sia indipendente dalle altre, è che nell'equazione vi sia almeno una incognita in esclusiva. Ciò può essere dedotto sia ispezionando direttamente le due equazioni, sia osservando che, se si considera l'insieme dei nodi "1" e "2" e l'insieme dei restanti nodi, cioè "3" e "4", il lato 5 collega un nodo del primo insieme a un nodo del secondo (il grafo è connesso). Di conseguenza l'intensità di corrente di quel lato comparirà soltanto in una sola delle prime due equazioni. Lo stesso ragionamento vale per l'insieme costituito dalla prima e dalla terza equazione e per l'insieme costituito dalla seconda e dalla terza equazione. Inoltre, bisogna mostrare, anche, che la prima equazione è indipendente dalla seconda e dalla terza. Il lato 2 collega il nodo "1" al nodo "4" e quindi l'intensità di corrente di quel lato comparirà soltanto in una sola delle prime tre equazioni del sistema (14), di conseguenza l'equazione relativa al nodo "1" è indipendente dalle equazioni relative al nodo "2" e "3". Lo stesso ragionamento possiamo ripeterlo per gli altri possibili sotto insiemi. In conclusione, comunque si scelgano tre equazioni del sistema (14) esse sono sempre tra loro linearmente indipendenti.

Osservazione

La proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le correnti può essere dimostrata per un generico circuito connesso, con n nodi e l bipoli, procedendo in questo modo. Si parte negando la tesi e si dimostra che ciò dà luogo a un risultato che contraddice l'ipotesi. Questa è la classica dimostrazione per assurdo.

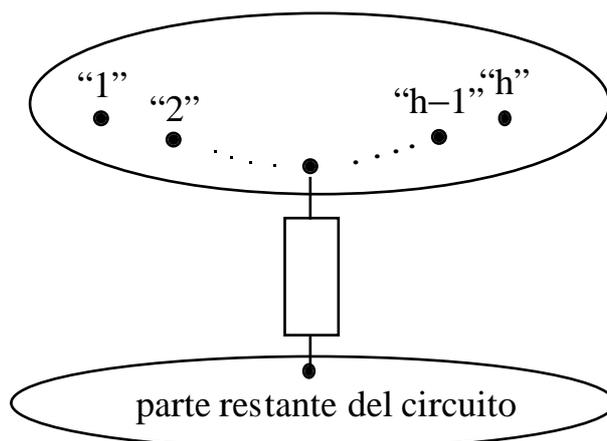


Fig. 3.17 Grafo usato per illustrare che $n - 1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti sono indipendenti.

Si assuma, senza perdere di generalità, che le prime h equazioni, con $h \leq (n - 1)$,

$$\begin{aligned}
 \text{nodo "1"} \quad f_1(i_1, i_2, \dots, i_l) &= 0, \\
 \text{nodo "2"} \quad f_2(i_1, i_2, \dots, i_l) &= 0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \text{nodo "h"} \quad f_h(i_1, i_2, \dots, i_l) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

di $n - 1$ equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le correnti a $n - 1$ nodi siano linearmente dipendenti; con il simbolo $f_j(i_1, i_2, \dots, i_l)$ indichiamo la somma algebrica delle intensità delle correnti che incidono nel nodo " j ". Inoltre, indichiamo l'insieme dei nodi " 1 ", " 2 ", ..., " h " con N_h e con N_{n-h} l'insieme dei restanti nodi. Poiché il grafo è connesso, esiste almeno un bipolo che collega un nodo dell'insieme N_h a un nodo dell'insieme N_{n-h} , Figura 3.17. Pertanto l'intensità di corrente di quel lato compare in una e una sola equazione dell'insieme (16), e quell'equazione, quindi, non può mai essere

espressa come combinazione lineare delle restanti equazioni dell'insieme (16). Tale contraddizione si ha per ogni insieme di h nodi con $h \leq (n-1)$. Quindi le $n-1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti sono linearmente indipendenti.

◆

3.6.2 Matrice di incidenza ridotta

Si considerino, senza perdere di generalità, le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le correnti ai nodi “1”, “2”, ..., “ $n-1$ ”. Esse costituiscono un insieme massimale di equazioni di Kirchhoff per le correnti linearmente indipendenti. Si elimini dalla matrice di incidenza A_a la riga corrispondente al nodo “ n ”, il nodo per il quale non si considera l'equazione di Kirchhoff per le correnti. Si ottiene, così, la *matrice di incidenza ridotta* A ; essa ha $n-1$ righe e l lati.

Le equazioni di Kirchhoff per le correnti relative ai nodi “1”, “2”, ..., “ $n-1$ ” possono essere espresse in forma matriciale come

$$A\mathbf{i} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Il rango di A è $n-1$, cioè essa è una matrice a rango massimo. Analizziamo di nuovo, come esempio concreto, le equazioni di Kirchhoff per le correnti del circuito di Figura 3.15a. Per questo circuito un insieme massimale di equazioni di Kirchhoff per le correnti linearmente indipendenti è

$$\begin{aligned} \text{nodo “1” } i_1 + i_2 - i_5 &= 0, \\ \text{nodo “2” } -i_1 + i_4 &= 0, \\ \text{nodo “3” } -i_3 - i_4 + i_5 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

e la corrispondente matrice di incidenza ridotta è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (\leftarrow \text{nodo “1”}) \\ (\leftarrow \text{nodo “2”}) \\ (\leftarrow \text{nodo “3”}) \end{array}. \quad (19)$$

3.6.3 Indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni

Si considerino, ora, le equazioni di Kirchhoff per le tensioni. Analizziamo, come esempio concreto, le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni al circuito rappresentato in Figura 3.15a,

$$\begin{aligned}
 \text{maglia M1} & \quad -v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0, \\
 \text{maglia M2} & \quad v_3 + v_4 - v_5 = 0, \\
 \text{maglia M3} & \quad -v_1 + v_2 + v_5 = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Queste equazioni non sono tra loro linearmente indipendenti. Ad esempio, la terza equazione (o una qualsiasi altra equazione) è combinazione lineare delle restanti due equazioni. La terza equazione può essere ottenuta sottraendo membro a membro le prime due, quindi tutte le “informazioni” contenute in essa sono già presenti nelle prime due. Ciò è un’immediata conseguenza del fatto che la somma della seconda e terza riga della matrice (10) è uguale alla prima riga: il rango della matrice di maglia (10) è minore di 3. Invece, le prime due equazioni del sistema (20) sono linearmente indipendenti, così come sono linearmente indipendenti la prima e la terza equazione, e la seconda e la terza equazione. Infatti, le maglie M_1 e M_2 costituiscono un insieme di maglie fondamentali del circuito (vedi Figura 3.16): ognuna di esse ha almeno un lato in esclusiva, quindi le relative equazioni per le tensioni hanno almeno una tensione incognita in esclusiva e di conseguenza sono linearmente indipendenti. Lo stesso ragionamento vale per gli altri insiemi di maglie fondamentali. È ovvio, a questo punto, che una qualsiasi equazione del sistema (20) può essere eliminata, senza alterare il contenuto di informazione del sistema stesso e, quindi, due sono le equazioni linearmente indipendenti di Kirchhoff per le tensioni.

Si consideri, ora, un generico circuito con m maglie distinte. Le m equazioni di Kirchhoff per le tensioni corrispondenti

$$\mathbf{B}_a \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{21}$$

sono linearmente dipendenti. In generale, quante e quali sono le equazioni di Kirchhoff alle tensioni linearmente indipendenti?

Proprietà di indipendenza delle equazioni di Kirchhoff per le tensioni

Per un circuito con grafo connesso con n nodi e l lati, le $l - (n - 1)$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni relative a un insieme di maglie fondamentali sono linearmente indipendenti. Le equazioni di Kirchhoff per le altre maglie del circuito possono essere espresse come combinazioni lineari delle equazioni per le maglie fondamentali.

◆

La proprietà di indipendenza può essere dimostrata semplicemente, anche nel caso generale, ricordando che ogni maglia di un insieme di maglie fondamentali ha almeno un lato in esclusiva. Di conseguenza, ogni equazione dell'insieme delle equazioni di Kirchhoff per un insieme di maglie fondamentali ha almeno una tensione incognita in esclusiva, e quindi le $l - (n - 1)$ equazioni per le maglie di un insieme di maglie fondamentali sono linearmente indipendenti.

L'insieme delle equazioni per le tensioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff a un insieme di maglie fondamentali è il più grande insieme di equazioni linearmente indipendenti per le tensioni (cioè un sottoinsieme massimale e linearmente indipendente delle equazioni (21))?

La risposta è sì. Tali equazioni contengono tutte le informazioni concernenti i vincoli imposti dalle equazioni di Kirchhoff per le tensioni. Infatti, se si considera una maglia non fondamentale, essa può essere sempre ottenuta attraverso "l'unione" di almeno due maglie fondamentali. Si consideri, ad esempio, il circuito illustrato in Figura 3.15a: la maglia M_3 si può ottenere unendo le due maglie fondamentali M_1 e M_2 , vedi Figura 3.16. Pertanto, l'equazione per la maglia M_3 si può ottenere combinando linearmente le equazioni relative alle maglie fondamentali M_1 e M_2 delle quali M_3 è l'unione (si noti che le tensioni relative ai lati in comune delle maglie fondamentali vengono eliminate).

Osservazione

Nel caso in cui il grafo è planare, un sottoinsieme massimale e linearmente indipendente di equazioni indipendenti per le tensioni può essere ottenuto applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni agli anelli del grafo. Le maglie M_2 e M_3 riportate in Figura 3.16 sono i due anelli del circuito di Figura 3.15a. Gli anelli in un grafo planare con n nodi e l lati sono $l - (n - 1)$.

3.6.4 Matrice di un insieme di maglie fondamentali

Si considerino, senza perdere di generalità, le equazioni ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni a un insieme di maglie fondamentali. Esse costituiscono un insieme massimale di equazioni di Kirchhoff per le tensioni linearmente indipendenti. Si elimini dalla matrice delle maglie B_a le righe corrispondenti alle altre maglie del circuito. Si ottiene, in questo modo, la *matrice di un insieme di maglie fondamentali* B ; essa ha $l - (n - 1)$ righe e l colonne. Allora, le equazioni di Kirchhoff per le tensioni relative a un insieme di maglie fondamentali possono essere espresse in forma matriciale come

$$B\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Il rango di B è $l - (n - 1)$, cioè essa è una matrice a rango massimo. Analizziamo di nuovo, come esempio concreto, le equazioni di Kirchhoff per le tensioni del circuito di Figura 3.15a. Per questo circuito un insieme massimale di equazioni di Kirchhoff per le tensioni linearmente indipendenti è

$$\begin{aligned} \text{maglia M1} \quad -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 &= 0 \\ \text{maglia M2} \quad v_3 + v_4 - v_5 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

e la matrice dell'insieme delle maglie fondamentali corrispondente è

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Esistono procedure generali per costruire le matrici degli insiemi delle maglie fondamentali di un assegnato circuito. Esse si basano sulla ricerca automatica di un albero del circuito secondo la procedura descritta al termine del § 2.8.1. Come abbiamo avuto modo di osservare, queste procedure sono molto onerose dal punto di vista “computazionale” già per circuiti con poche decine di nodi e di lati.

3.7 Il sistema di equazioni fondamentali

Si consideri un circuito connesso con n nodi e l bipoli. Le incognite del circuito sono le intensità di corrente e le tensioni di ciascun bipolo, quindi sono l intensità di corrente e l tensioni.

Le *equazioni circuitali fondamentali* sono costituite da:

- (a) $n-1$ equazioni linearmente indipendenti per le intensità di corrente, $\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}$, ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le correnti a $n-1$ nodi qualsiasi del circuito;
- (b) $l-(n-1)$ equazioni linearmente indipendenti alle tensioni, $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ottenute applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni a $l-(n-1)$ maglie fondamentali del circuito (agli $l-(n-1)$ anelli se il grafo del circuito è planare);
- (c) l equazioni caratteristiche indipendenti.

Pertanto, le equazioni linearmente indipendenti che si ottengono dall'applicazione delle leggi di Kirchhoff sono l ,

$$\begin{array}{ccc} (n-1) + [l - (n-1)] = l. & & (25) \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow & & \\ \text{LKC} \qquad \qquad \text{LKV} & & \end{array}$$

A queste equazioni diamo il nome di *equazioni di interconnessione* perché dipendono solo da come gli elementi circuitali sono tra loro collegati. Esse sono algebriche, lineari e omogenee; inoltre, sono tutte linearmente indipendenti perché nelle equazioni $\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}$ compaiono solo le intensità di corrente e nelle equazioni $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ compaiono solo le tensioni (e quindi sono anche compatibili tra loro).

Le equazioni caratteristiche possono essere sia di tipo algebrico che di tipo differenziale, a seconda della natura del bipolo. Se il circuito è costituito da soli elementi resistivi e generatori, le equazioni circuitali sono di tipo *algebrico*. Se nel circuito ci sono anche elementi dinamici, allora le equazioni circuitali sono di tipo *algebrico-differenziale*.

In conclusione, l'insieme delle equazioni di interconnessione e delle equazioni caratteristiche è un sistema di $2l$ equazioni in $2l$ incognite. Esso è un insieme

di equazioni indipendenti? ⁵ Le equazioni di interconnessione sono compatibili con le equazioni caratteristiche? Fatta eccezione di pochi casi, molto particolari, le equazioni di interconnessione e le equazioni caratteristiche sono tra loro indipendenti e compatibili.

Esempio

Ora applicheremo i risultati che abbiamo appena ottenuto a un circuito di resistori lineari e generatori ideali. Si consideri il circuito illustrato in Figura 3.18. Esso è costituito da tre resistori lineari e da due generatori indipendenti uno di tensione sinusoidale, $e(t) = E_m \sin(2\pi ft)$ e uno di corrente stazionario, $j(t) = I_0$. I parametri del circuito sono riportati in Tabella 2.5. Si determinino le intensità di corrente e le tensioni del circuito.

$R_1 = 1 \Omega$	$R_2 = 2 \Omega$	$R_3 = 2$	$f = 1 \text{ kHz}$	$E_m = 1 \text{ V}$	$I_0 = 1 \text{ A}$
------------------	------------------	-----------	---------------------	---------------------	---------------------

Tab. 2.5 Parametri del circuito di Figura 3.18

Il circuito è costituito da 5 bipoli. Si fissino i riferimenti per i versi delle intensità di corrente, come è indicato in Figura 3.18b, e si assuma per ciascun bipolo la convenzione dell'utilizzatore. Di conseguenza sono fissati anche i versi di riferimento per le tensioni. La prima operazione che bisogna fare quando si imposta la soluzione di un circuito è assegnare i versi di riferimenti delle intensità di corrente e tensioni.

Le incognite del problema sono le 5 intensità di corrente i_1, i_2, \dots, i_5 e le 5 tensioni v_1, v_2, \dots, v_5 . In realtà la tensione del generatore di tensione e l'intensità di corrente del generatore di corrente non sono delle vere incognite, anche se formalmente e per il momento conviene considerarle come tali.

Ora bisogna cercare le equazioni di interconnessione indipendenti. A tale scopo è utile riferirsi al grafo orientato riportato in Figura 3.18c.

Il circuito in questione ha tre nodi (i nodi "1", "2" e "3"), quindi è possibile scrivere solo due equazioni di Kirchhoff per le correnti linearmente indipendenti (si scelgano le equazioni relative ai nodi "1" e "2")

⁵ Siano E_1 ed E_2 due insiemi di equazioni, ciascuno dei quali costituito da sole equazioni compatibili e indipendenti. In generale, le equazioni ottenute dall'unione di E_1 ed E_2 possono essere incompatibili e/o dipendenti.

$$\begin{aligned} \text{nodo "1"} \quad i_1 - i_5 &= 0, \\ \text{nodo "2"} \quad i_1 - i_2 - i_3 + i_4 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

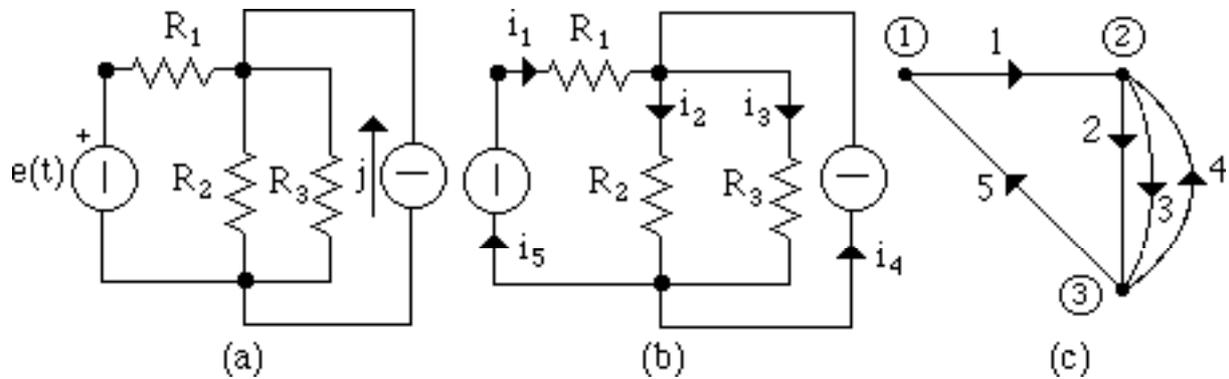


Fig. 3.18 Circuito resistivo lineare (a), circuito orientato (b) e grafo orientato corrispondente (c).

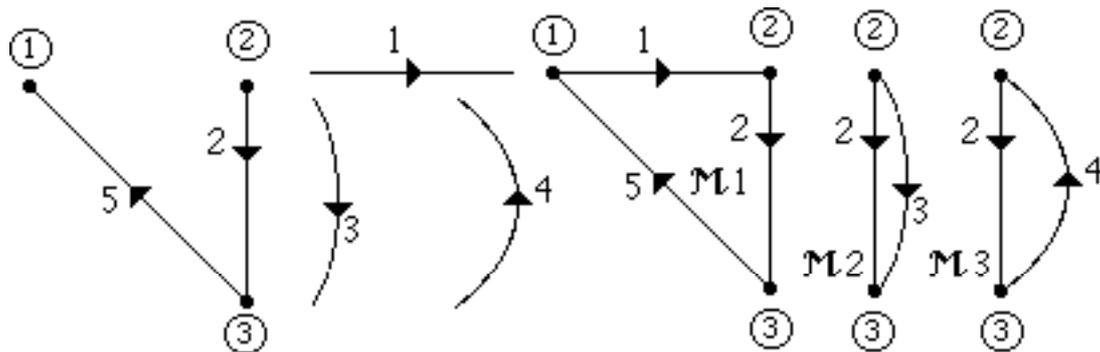


Fig. 3.19 Un albero del grafo di Figura 3.18c, coalbero e insieme di maglie fondamentali corrispondenti.

Ora bisogna determinare le equazioni di Kirchhoff indipendenti per le tensioni. A tale scopo si costruisca un insieme di maglie fondamentali. In Figura 3.19 è illustrato un albero del grafo di Figura 3.18c, insieme ai lati del coalbero e alle tre maglie fondamentali relative all'albero che è stato scelto. Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni alle maglie fondamentali M_1 , M_2 e M_3 si ottiene l'insieme di equazioni linearmente indipendenti

$$\begin{aligned} \text{maglia } M_1 \quad v_1 + v_2 + v_5 &= 0, \\ \text{maglia } M_2 \quad -v_2 + v_3 &= 0, \\ \text{maglia } M_3 \quad -v_2 - v_4 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Il grafo del circuito in esame è planare e le tre maglie M_1 , M_2 e M_3 sono anche gli anelli del circuito.

Utilizzando le relazioni caratteristiche degli elementi del circuito si ottiene un altro insieme di equazioni linearmente indipendenti, costituito dalle 5 equazioni

$$\begin{array}{ll}
 \text{resistore "1"} & v_1 - R_1 i_1 = 0, \\
 \text{resistore "2"} & v_2 - R_2 i_2 = 0, \\
 \text{resistore "3"} & v_3 - R_3 i_3 = 0, \\
 \text{generatore corrente} & i_4 = j, \\
 \text{generatore tensione} & v_5 = -e.
 \end{array} \tag{28}$$

Unendo i sistemi di equazioni fondamentali (26), (27) e (28) si ottiene il sistema delle equazioni circuitali relative al circuito in esame. Esso è costituito da 10 equazioni e in 10 incognite,

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_5 = 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0, \\ v_1 + v_2 + v_5 = 0, \\ -v_2 + v_3 = 0, \\ -v_2 - v_4 = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v_1 - i_1 = 0, \\ v_2 - 2i_2 = 0, \\ v_3 - 2i_3 = 0, \\ i_4 = 1, \\ v_5 = -\sin(2\pi 1000t). \end{array} \right. \tag{29}$$

Osservazione

Si introduca il vettore \mathbf{x} così definito, $\mathbf{x} = (i_1, i_2, \dots, i_5, v_1, v_2, \dots, v_5)^T$; allora il sistema (29) può essere rappresentato sinteticamente attraverso l'equazione vettoriale lineare

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{d}, \tag{30}$$

dove \mathbf{L} è una matrice quadrata 10×10 e \mathbf{d} è un vettore noto di dimensione 10 dipendente solo dalle sorgenti. La maggior parte degli elementi della matrice \mathbf{L} sono nulli, e quindi è sparsa.

Le equazioni di un qualsiasi circuito, costituito da soli resistori lineari e generatori indipendenti (e più in generale da elementi lineari di tipo *resistivo*), possono essere sempre poste nella forma (30): \mathbf{L} è una matrice quadrata $2l \times 2l$

(l sono i bipoli del circuito), \mathbf{x} e \mathbf{d} sono due vettori di dimensione $2l$. Pertanto il modello matematico di un circuito resistivo lineare (con questa espressione intendiamo un circuito di resistori lineari e generatori indipendenti) è costituito da un sistema di equazioni algebriche lineari.

Il sistema (30) ha una e una sola soluzione se e solo se il sistema omogeneo associato

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (31)$$

che descrive il funzionamento del circuito quando i generatori sono spenti, ha solo la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Questa condizione è verificata se e solo se le equazioni del sistema omogeneo associato sono linearmente indipendenti, cioè se il rango della matrice \mathbf{L} è uguale a $2l$. Ciò accade se e solo se le equazioni del sistema completo (30) sono indipendenti e compatibili tra loro. Nel caso in esame questa condizione è verificata (anche se non è immediato provarlo).

I metodi di soluzione per i sistemi algebrici lineari vengono, usualmente, divisi in due gruppi.

I *metodi diretti* sono i metodi che in assenza di errori di arrotondamento danno la soluzione esatta in un numero finito di operazioni. I *metodi iterativi* sono metodi in cui la soluzione è ottenuta come limite di una successione di soluzioni di problemi più semplici. Nel seguito faremo un breve accenno ai soli metodi diretti.

I metodi diretti classici sono: la regola di Cramer, mediante la quale le soluzioni vengono espresse come quozienti di determinanti di ordine $2l$, e il metodo di eliminazione di Gauss ⁶ (o metodo della riduzione per sostituzione). Per valutare il costo computazionale richiesto dai due metodi si considera il numero di moltiplicazioni coinvolte nei rispettivi algoritmi. Naturalmente, vi sono anche altri tipi di operazioni, come le addizioni, ma solitamente ci si riferisce alle moltiplicazioni, in quanto, in generale, più onerose per quanto riguarda l'aspetto computazionale. Il numero di moltiplicazioni necessarie per risolvere il sistema attraverso la regola di Cramer è $(2l+1)(2l-1)2l!$, mentre nel metodo di Gauss il numero di moltiplicazioni è dell'ordine di $8l^3$. Per $l=5$ (l'ordine del sistema (110) è 10) il metodo di Gauss richiede all'incirca mille moltiplicazioni, mentre la regola di Cramer ha bisogno all'incirca di $3.6 \cdot 10^6$

⁶ Questo metodo è attribuito comunemente a Gauss, anche se nel libro di Valeriano Comincioli, *Analisi Numerica* edito dalla McGraw-Hill (1990), si accenna a un esempio 3×3 contenuto in un manoscritto cinese datato più di 2000 anni.

moltiplicazioni; per $l=10$ il metodo di Gauss ha bisogno di circa 8000 moltiplicazioni mentre la regola di Cramer richiede all'incirca $2.4 \cdot 10^{18}$ moltiplicazioni. Usando un calcolatore in grado di realizzare 10^9 moltiplicazioni al secondo si hanno i seguenti tempi di calcolo:

$$\begin{aligned} \text{Regola di Cramer} &\cong 3 \cdot 10^4 \text{ anni;} \\ \text{Metodo di Gauss} &\cong 8 \cdot 10^{-6} \text{ secondi.} \end{aligned}$$

Anche per sistemi di modeste dimensioni il metodo di Cramer si rivela, quindi, impraticabile. Al contrario, il metodo di Gauss permette di risolvere in tempi ragionevoli sistemi di grosse dimensioni. Sfruttando la natura particolare delle matrici, quali ad esempio la sparsità e la simmetria, è possibile ridurre ulteriormente sia la quantità di memoria richiesta, sia il numero di operazioni.



Il sistema (29) sarà risolto utilizzando il metodo di Gauss. L'idea centrale del metodo di Gauss è la riduzione della dimensione del sistema, cioè del numero di equazioni, per eliminazione. Essa consiste nel ricavare da una fissata delle 10 equazioni una particolare incognita e nella sua sostituzione nelle equazioni rimanenti (eliminazione in avanti). La sostituzione fa così diminuire di pari passo sia il numero di equazioni che il numero di incognite e quindi diminuisce la dimensione del problema. Iterando il procedimento, si riduce il problema originario a un problema a una sola equazione in una sola incognita. Determinata tale incognita, le altre incognite sono successivamente ottenute mediante una procedura di sostituzione all'indietro.

Operando in questo modo, dopo l'eliminazione in avanti, il sistema (29) è trasformato nel sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} i_4 = 1, \\ v_5 = -\sin(2\pi ft), \\ v_1 = i_1, \\ v_2 = 2i_2, \\ v_3 = 2i_3, \\ i_5 = i_1, \\ i_3 = i_2, \\ 2i_2 = \sin \sin(2\pi ft) - i_1, \\ 2i_1 = \sin \sin(2\pi ft) - 1. \end{array} \right. \quad (32)$$

La soluzione del circuito si ottiene dal sistema (32) attraverso l'eliminazione all'indietro. Così facendo si ottiene

$$\begin{aligned}
 i_1 &= 0.5[\sin(2\pi 1000t) - 1], \quad i_2 = 0.5[\sin(2\pi 1000t) + 1] \\
 i_3 &= 0.5[\sin(2\pi 1000t) + 1], \quad i_4 = 1, \quad i_5 = 0.5[\sin(2\pi 1000t) - 1], \\
 v_1 &= 0.5[\sin(2\pi 1000t) - 1], \quad v_2 = \sin(2\pi 1000t) + 1, \\
 v_3 &= \sin(2\pi 1000t) + 1, \quad v_4 = -\sin(2\pi 1000t) - 1, \quad v_5 = -\sin(2\pi 1000t).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Osservazione

È interessante fare qualche considerazione sull'esistenza e unicità della soluzione di un circuito di resistori lineari e generatori indipendenti. A questo scopo si considerino i due circuiti illustrati in Figura 3.20 e si scrivano le rispettive equazioni, (il sistema (34) per il circuito di Figura 3.20a e il sistema (35) per il circuito di Figura 3.20b),

$$\left\{ \begin{array}{l}
 i_1 + i_2 + i_3 = 0, \\
 v_1 - v_3 = 0, \\
 v_1 - v_2 = 0, \\
 v_1 = E_1, \\
 v_2 = E_2, \\
 v_3 - Ri_3 = 0,
 \end{array} \right. \tag{34}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l}
 i_1 + i_4 = 0, \\
 i_2 + i_3 - i_4 = 0, \\
 v_2 - v_3 = 0, \\
 v_1 - v_3 - v_4 = 0, \\
 v_1 = E, \\
 i_2 = -J, \\
 v_3 - Ri_3 = 0, \\
 v_4 + Ri_4 = 0.
 \end{array} \right. \tag{35}$$

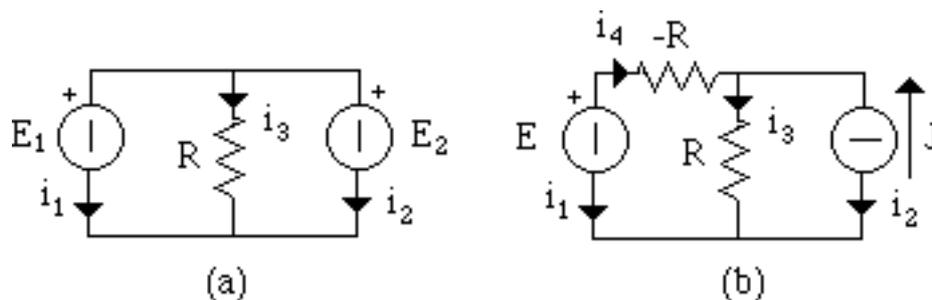


Fig. 3.20 Due esempi di modelli circuitali “mal posti”.

Nel primo circuito (Figura 3.20a) abbiamo un resistore e due generatori di tensione in parallelo; nel secondo circuito (Figura 3.20b) abbiamo un resistore con resistenza negativa $-R$ e uno con resistenza positiva R .

Nel sistema di equazioni (34) la terza equazione è incompatibile con la quarta e la quinta (le equazioni del sistema omogeneo associato non sono tutte indipendenti). Nel sistema di equazioni (35) la seconda equazione è incompatibile con le ultime cinque (anche in questo caso le equazioni del sistema omogeneo associato non sono tutte indipendenti). Quindi, entrambi i sistemi, in generale, non ammettono soluzioni. Nel primo caso si hanno infinite soluzioni se $E_1 = E_2$ (le equazioni del sistema completo sono compatibili ma non sono più indipendenti), mentre nel secondo caso si hanno infinite soluzioni se $E = 0$ e $J = 0$.

Queste situazioni “patologiche” non si verificano se si assume che: (a) tutte le resistenze sono positive; (b) non esistono maglie costituite da soli generatori di tensione e corto circuiti; (c) non esistono insiemi di tagli costituiti da soli generatori di corrente e circuiti aperti. Comunque, qualora si verificassero queste situazioni patologiche, basta introdurre degli opportuni resistori per ottenere un modello circuitale “ben posto”. Ad esempio, se nel circuito di Figura 3.20a si introduce un resistore in serie a uno dei due generatori, il problema non è più mal posto (bisogna sempre tenere presente che il modello circuitale che si sta analizzando è un modello dell'oggetto fisico, ma non è l'oggetto fisico). Un modello è mal posto quando non rappresenta in maniera adeguata l'oggetto fisico, perché sono stati trascurati effetti di fenomeni che non possono esserlo.

◆

Esercizio

Si determini il sistema di equazioni fondamentali del circuito riportato in Figura 3.21, e se ne determini la soluzione applicando il metodo di Gauss. I parametri del circuito sono riportati in Tabella 2.6.

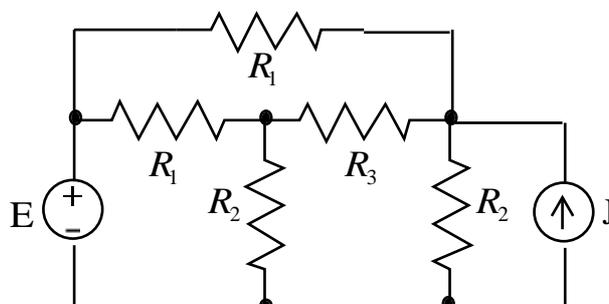


Fig. 3.21 *Circuito di resistori e generatori stazionari.*

$R_1 = 1 \Omega$	$R_2 = 2 \Omega$	$R_3 = 4$	$E = 1 \text{ V}$	$J = 1 \text{ A}$
------------------	------------------	-----------	-------------------	-------------------

Tab. 2.6 *Parametri del circuito di Figura 3.20*

◆

Osservazione

Abbiamo, solo per semplicità, considerato circuiti di resistori e generatori. L'analisi svolta si applica senza alcuna difficoltà ai circuiti che contengono anche elementi dinamici. Per questi circuiti il sistema di equazioni fondamentali è misto: esso è costituito da equazioni algebriche e da equazioni differenziali. Il sistema di equazioni fondamentali può essere ridotto a un sistema di sole equazioni differenziali del primo ordine, tante quanti sono i bipoli dinamici, in cui le incognite sono le grandezze di stato del circuito, utilizzando ancora il metodo di Gauss. Ritourneremo su questa questione nel Capitolo 6, dove sarà approfondita.

◆

3.8 Potenziali di nodo

Le equazioni di interconnessione di un circuito possono essere riformulate attraverso l'introduzione dei *potenziali di nodo* e delle *correnti di maglia*. Queste grandezze ausiliarie sono alla base di due metodi classici di analisi circuitale: il *metodo dei potenziali di nodo* e il *metodo delle correnti di maglia*. Il metodo dei potenziali di nodo consiste nell'esprimere le tensioni di ciascun lato attraverso delle opportune grandezze ausiliarie in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le tensioni sia verificata automaticamente per ogni maglia del circuito. Dualmente, il metodo delle correnti di maglia consiste nell'esprimere le intensità di corrente di ciascun lato attraverso delle opportune grandezze ausiliarie in maniera tale da imporre che la legge di Kirchhoff per le correnti sia verificata automaticamente per ogni nodo del circuito.

In queste note presenteremo in dettaglio il metodo dei potenziali di nodo, perché, come tra poco faremo vedere, attraverso questo metodo si pone rimedio alla difficoltà derivante dall'elevato costo computazionale necessario per individuare un insieme di maglie fondamentali del circuito. Invece, per quanto riguarda il metodo delle correnti di maglia ci limiteremo a descriverne gli aspetti fondamentali. L'applicazione del metodo delle correnti di maglia richiede la determinazione di un insieme di maglie fondamentali, quindi, in generale, il costo computazionale richiesto è molto elevato.

Si consideri un generico circuito, con n nodi e l bipoli, si assegnino i versi di riferimento per le intensità di corrente e si faccia su ciascun bipolo la convenzione dell'utilizzatore. Si associi a ciascun nodo del circuito un *potenziale di nodo*: al generico nodo " i " ($i = 1, 2, \dots, n$) si associ il potenziale di nodo e_i . Per esemplificare, faremo riferimento a un circuito con un grafo del tipo illustrato in Figura 3.21a.

Si assuma, ora, che sia possibile esprimere la tensione di ciascun bipolo del circuito in funzione dei potenziali dei due nodi nei quali il lato incide secondo la seguente regola (vedi Figura 3.21b): la tensione v_s del generico lato s ($s = 1, 2, \dots, l$) del circuito è espressa come differenza tra il potenziale del nodo marcato con il segno "+" (da cui esce la freccia che indica il verso di riferimento dell'intensità di corrente) e il potenziale del nodo marcato con il segno "-" (in cui entra la freccia che indica il verso di riferimento dell'intensità di corrente),

$$v_s = e_p - e_q \text{ per } s = 1, 2, \dots, l . \quad (36)$$

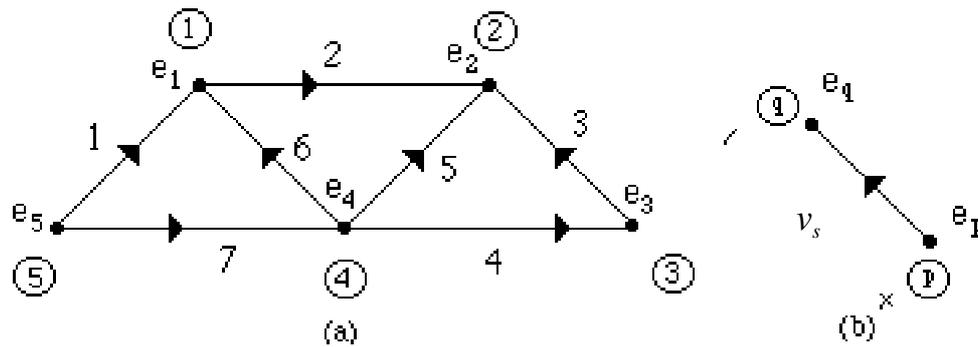


Fig. 3.21 *Potenziali di nodo.*

Osservazione

È evidente che, una volta stabilita la stessa convenzione per tutti i bipoli, ad esempio, quella dell'utente, per scrivere le relazioni (36), con i segni corretti, sono sufficienti i versi di riferimento delle sole intensità di corrente: la tensione v_s del generico lato s ($s=1,2,\dots,l$) del circuito è espressa come differenza tra il potenziale del nodo da cui esce la freccia che indica il verso di riferimento dell'intensità di corrente i_s (il verso con cui è stato orientato il lato del grafo corrispondente), e il potenziale del nodo in cui entra la freccia che indica il verso di riferimento dell'intensità di corrente.

◆

Le tensioni espresse attraverso la (36) verificano automaticamente la seconda legge di Kirchhoff qualunque siano i valori dei potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_n .

Verifichiamo subito questa affermazione riferendoci, ad esempio, al circuito il cui grafo è riportato in Figura 3.21a. Si consideri, ad esempio, la maglia costituita dai lati 1, 2, 3, 4 e 7, riportata in Figura 3.22 e si determini la corrispondente equazione di Kirchhoff per le tensioni. Si ottiene l'equazione

$$v_1 + v_2 - v_3 - v_4 - v_7 = 0. \quad (37)$$

Si esprimano le tensioni dei lati 1, 2, 3, 4 e 7 attraverso i potenziali di nodo secondo la (36),

$$v_1 = e_5 - e_1, \quad v_2 = e_1 - e_2, \quad v_3 = e_3 - e_2, \quad v_4 = e_4 - e_3, \quad v_7 = e_5 - e_4. \quad (38)$$

Sostituendo le (38) nella (37) si ottiene:

$$(e_5 - e_1) + (e_1 - e_2) - (e_3 - e_2) - (e_4 - e_3) - (e_5 - e_4) = 0. \quad (39)$$

L'uguaglianza (39) è l'identità $0=0$, cioè essa è sempre verificata, indipendentemente da valori dei potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_5 . Di conseguenza le tensioni v_1, v_2, v_3, v_4 e v_7 espresse attraverso le (38) verificano automaticamente l'equazione di Kirchhoff (37), indipendentemente dai valori dei potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_5 .

Questa è una proprietà generale, indipendente dal circuito e dalla maglia considerata nel circuito. Essa deriva dal fatto che ogni maglia definisce un cammino chiuso, pertanto nella somma algebrica delle tensioni il potenziale di ogni nodo appartenente alla maglia compare due volte, una volta con il segno + e una volta con il segno -.

Proprietà

Se le tensioni di un circuito sono espresse in termini di potenziali di nodo attraverso la relazione (36), allora esse verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le tensioni.



Osservazione

Questo risultato è importante solo se le tensioni del circuito possono essere sempre effettivamente rappresentate come differenza tra due potenziali secondo la relazione (36). La questione può essere formalizzata nel modo seguente: si supponga che siano note le tensioni v_1, v_2, \dots, v_l del circuito in esame. È possibile determinare n potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_n in modo tale che per ogni bipolo sia verificata la (36) ?

Con riferimento all'esempio riportato in Figura 3.21b ciò si traduce nella seguente questione: il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} e_5 - e_1 = v_1, \quad e_1 - e_2 = v_2, \quad e_3 - e_2 = v_3, \quad e_4 - e_3 = v_4, \\ e_5 - e_4 = v_5, \quad e_5 - e_4 = v_6, \quad e_5 - e_4 = v_7, \end{aligned} \quad (40)$$

in cui le tensioni sono da considerarsi come termini noti, ammette sempre una soluzione? Questo sistema potrebbe non ammettere soluzioni se alcune equazioni fossero tra loro incompatibili. Come ora faremo vedere, il sistema (40) ammette sempre soluzioni e il numero di esse è infinito se le tensioni verificano la legge di Kirchhoff per le tensioni.

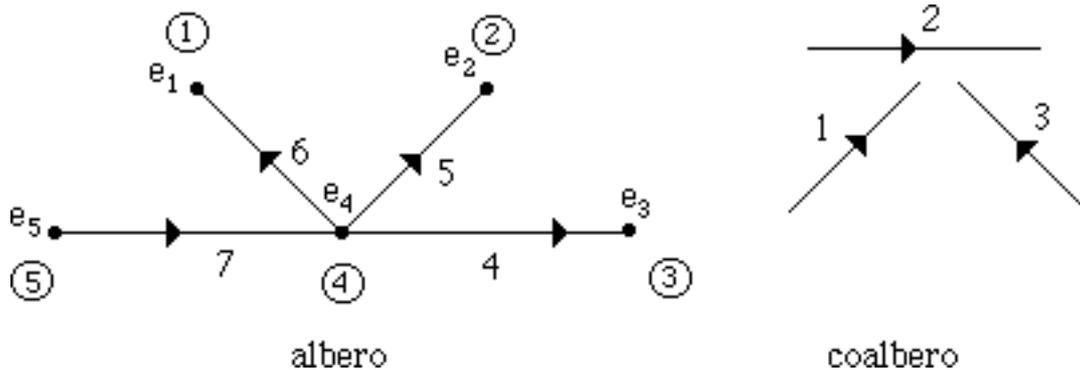


Fig. 3.23 Un albero e corrispondente coalbero del grafo rappresentato in Figura 3.21a.

Conviene affrontare questo problema utilizzando la teoria dei grafi piuttosto che risolvere direttamente il sistema (40). L'insieme dei potenziali di nodo e_1, e_2, \dots, e_5 corrispondente a un generico insieme di tensioni v_1, v_2, \dots, v_7 compatibili con la legge di Kirchhoff può essere determinato in questo modo. Si consideri un albero del grafo di Figura 3.21a, ad esempio quello rappresentato in Figura 3.23a e il corrispondente coalbero, Figura 3.23b. Si assuma, per il momento, che sia possibile assegnare un valore arbitrario, che indichiamo con e_0 (*potenziale di riferimento*), per esempio, al potenziale del nodo "5" (*nodo di riferimento*),

$$e_5 = e_0; \quad (41)$$

si passi al nodo "4", contiguo al nodo "5" e si scelga il potenziale e_4 in modo tale che sia verificata la (36),

$$e_4 = e_0 - v_7; \quad (42)$$

si considerino ora i nodi contigui al nodo "4" e si scelgano i potenziali e_1 , e_2 ed e_3 in modo tale che sia verificata ancora la (36),

$$\begin{aligned}
 e_1 &= e_4 - v_6, \\
 e_2 &= v_5 - e_4, \\
 e_3 &= e_4 - v_4.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Abbiamo già un primo risultato notevole: i potenziali di nodo, a meno di una costante additiva rappresentata dal potenziale di riferimento, sono completamente determinati dalle tensioni dei bipoli corrispondenti ai lati dell'albero.

Questo risultato non dipende dal particolare circuito in esame. Esso è solo conseguenza del fatto che due lati distinti di un qualsiasi albero incidono almeno in due nodi diversi (se ciò non fosse ci sarebbero delle maglie nell'albero).

Se si sceglie un altro nodo come nodo di riferimento o un altro albero si ottiene un altro insieme di potenziali di nodo che differisce da quello che abbiamo appena ottenuto solo per una costante additiva. Il lettore verifichi tale proprietà. Tutte le tensioni dei lati di coalbero sono esprimibili attraverso le relazioni (36) in funzione dei potenziali di nodo dati dalle espressioni (41)-(43). Infatti, applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni alle maglie fondamentali corrispondenti al coalbero di Figura 3.23b si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_6 + v_7 = (e_4 - e_1) + (e_5 - e_4) = e_5 - e_1, \\
 v_2 &= v_5 - v_6 = (e_4 - e_2) - (e_4 - e_1) = e_1 - e_2, \\
 v_3 &= v_5 - v_4 = (e_4 - e_2) - (e_4 - e_3) = e_3 - e_2.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Anche questo risultato è generale e non dipende dal particolare circuito in esame. Applicando la legge di Kirchhoff alle $l - (n - 1)$ maglie fondamentali del circuito è possibile esprimere sempre tutte le tensioni di coalbero in funzione delle sole tensioni di albero. Ora se si esprimono queste ultime in termini di potenziali di nodo attraverso la relazione (36), si ha immediatamente che anche ogni tensione di coalbero verifica la relazione (36). Infatti ogni maglia fondamentale è costituita da un solo lato di coalbero e i restanti lati sono solo di albero. Inoltre, nella somma algebrica delle tensioni di albero di una qualsiasi maglia fondamentale, i potenziali dei due nodi nei quali il lato di coalbero incide compaiono una sola volta, mentre i potenziali degli altri nodi compaiono due volte, una volta con il segno + e una volta con il segno - .

Osservazione

C'è un profondo legame tra la rappresentazione delle tensioni di un circuito attraverso i potenziali di nodo e la rappresentazione del campo elettrico nel modello quasi-stazionario elettrico attraverso il gradiente di una funzione potenziale scalare. In entrambi i casi introducendo una grandezza ausiliaria si riesce a imporre automaticamente la conservazione di una “circuitazione”: nel modello quasi-stazionario elettrico, esprimendo il campo elettrico attraverso il gradiente del potenziale elettrico scalare, si impone naturalmente che il campo sia conservativo rispetto alla circuitazione. In realtà c'è un legame ancora più profondo tra questi due rappresentazioni: il potenziale di ogni nodo di un circuito coincide, a meno di una costante additiva arbitraria, con il potenziale scalare elettrico della giunzione metallica che il nodo rappresenta.



La relazione tra le tensioni e i potenziali di nodo di un circuito può essere espressa, in generale, attraverso la matrice di incidenza. Si introduca a questo proposito il vettore dei potenziali di nodo $\mathbf{e}_a = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$. La relazione tra il vettore delle tensioni \mathbf{v} ed \mathbf{e}_a è data da

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_a^T \mathbf{e}_a \quad (45)$$

dove \mathbf{A}_a^T è la matrice trasposta della matrice di incidenza. La j -esima riga ($j = 1, 2, \dots, l$) di \mathbf{A}_a^T corrisponde al j -esimo lato del grafo e coincide con la j -esima colonna di \mathbf{A}_a . Essa contiene le informazioni sui nodi nei quali il j -esimo lato incide: l'elemento della riga corrispondente al nodo da cui il j -esimo lato orientato esce è uguale a $+1$, l'elemento della riga corrispondente al nodo in cui il j -esimo lato orientato entra è uguale a -1 e gli altri elementi sono tutti nulli. Pertanto il prodotto della j -esima riga di \mathbf{A}_a^T con il vettore colonna \mathbf{e}_a è uguale alla differenza tra il potenziale del nodo da cui il lato j (orientato concordemente con il verso di riferimento per la corrispondente intensità di corrente), esce e il potenziale del nodo in cui lo stesso lato entra. Ad esempio, la tensione v_1 del lato 1 del circuito il cui grafo è riportato in Figura 3.21a è data dalla differenza tra il potenziale del nodo “5” e il potenziale del nodo “1”, $v_1 = e_5 - e_1$. Quindi, essa può essere ottenuta, considerando il vettore riga che si ottiene trasponendo il primo vettore colonna

della matrice di incidenza, $[-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ +1]$, e moltiplicandolo per il vettore colonna rappresentativo dei potenziali di nodo del circuito, $[e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5]^T$.

Esercizio

Il lettore verifichi la relazione (45) per il circuito il cui grafo è riportato in Figura 3.21a.



Si assuma come riferimento per il potenziale quello del nodo “ n ”, lo si ponga uguale a zero, $e_n = 0$, e si introduca il vettore dei potenziali ridotto $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})^T$. In termini del vettore \mathbf{e} la (45) diventa

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e} \quad (46)$$

dove \mathbf{A} è la matrice di incidenza ridotta ottenuta eliminando dalla matrice di incidenza \mathbf{A}_a la riga corrispondente al n -esimo nodo (cioè l'ultima). Le tensioni espresse attraverso la (46) verificano automaticamente le equazioni di Kirchhoff per le tensioni indipendentemente dai valori dei potenziali di nodo. Pertanto, imporre la (46) è del tutto equivalente a imporre le equazioni di Kirchhoff per le tensioni. Quindi, le equazioni di interconnessione possono essere così riformulate

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (47)$$

Il sistema costituito dalle equazioni di interconnessione (47) e dalle equazioni caratteristiche prende il nome di sistema di *equazioni di tableau* (esse sono $2l + (n - 1)$ equazioni in altrettante incognite). La caratteristica fondamentale delle equazioni di tableau è che le equazioni di interconnessione sono formulate utilizzando la sola matrice di incidenza ridotta, non c'è bisogno di costruire una matrice di un insieme di maglie fondamentali. Le equazioni di tableau sono alla base di numerosi simulatori numerici per circuiti.

Esercizio

Si determinino le equazioni di interconnessione (47) per il circuito rappresentato in Figura 3.21a.



In molti casi (ora vedremo quali) le equazioni di tableau possono essere ridotte, tramite eliminazione per sostituzione, a un sistema di equazioni di dimensione notevolmente più bassa in cui le incognite sono solo i potenziali di nodo. I potenziali di nodo incogniti sono $(n-1)$ mentre le equazioni di tableau sono $2l + (n-1)$. Per ridurre si può procedere in questa maniera. Il primo passo nella procedura di riduzione consiste nel rappresentare tutte le tensioni attraverso i potenziali di nodo, poi sostituirle nelle equazioni costitutive e infine imporre le equazioni di Kirchhoff per le correnti. Ricordiamoci sempre che quando si applica il metodo dei potenziali bisogna imporre esplicitamente le equazioni di Kirchhoff per le correnti (le equazioni di Kirchhoff per le tensioni non devono essere imposte).

Esercizio

Per mostrare una applicazione del metodo dei potenziali di nodo e la procedura di riduzione delle equazioni di tableau, si consideri il circuito di resistori lineari e di generatori indipendenti illustrato in Figura 3.24; si assumano per i parametri del circuito i valori riportati in Tabella 2.7.

Il circuito in esame ha 3 nodi e 5 lati. Costruiamo il sistema di equazioni di tableau del circuito. Assumiamo come nodo di riferimento il nodo “3”, pertanto poniamo $e_3 = 0$. Le equazioni di Kirchhoff per le correnti per i nodi “1” e “2” sono

$$i_1 + i_4 = 0, \quad (48)$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_5 = 0. \quad (49)$$

Questo é un insieme massimale di equazioni di Kirchhoff per le correnti linearmente indipendenti.

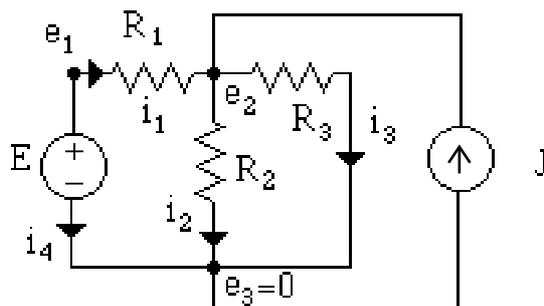


Fig. 3.24 Il potenziale del nodo "3" è posto uguale a zero.

$E = 10 \text{ V}$	$J = 1 \text{ A}$	$R_1 = 1 \Omega$	$R_2 = 1 \Omega$	$R_3 = 2 \Omega$
--------------------	-------------------	------------------	------------------	------------------

Tab. 2.7 Parametri del circuito di Figura 3.24

Le equazioni che esprimono le tensioni in funzione dei potenziali di nodo sono

$$v_1 = e_1 - e_2, \quad (50)$$

$$v_2 = e_2, \quad (51)$$

$$v_3 = e_2, \quad (52)$$

$$v_4 = e_1, \quad (53)$$

$$v_5 = e_2. \quad (54)$$

Infine, le equazioni caratteristiche dei singoli bipoli sono

$$v_1 - R_1 i_1 = 0, \quad (55)$$

$$v_2 - R_2 i_2 = 0, \quad (56)$$

$$v_3 - R_3 i_3 = 0, \quad (57)$$

$$v_4 = E, \quad (58)$$

$$i_5 = J. \quad (59)$$

Questo sistema di equazioni è algebrico lineare ed è costituito da 13 equazioni in 13 incognite. Questo sistema può essere risolto utilizzando la tecnica di riduzione per sostituzione (metodo di eliminazione di Gauss).

La strategia di riduzione ottima la si ottiene sfruttando le proprietà di connessione del circuito in esame. Risolveremo il problema della riduzione in questo modo. Osserviamo, innanzi tutto, che il potenziale e_1 non è una vera

incognita del problema perché esso è imposto dal generatore di tensione (avendo scelto $e_3 = 0$); quindi abbiamo

$$e_1 = E. \quad (60)$$

Pertanto, l'unico potenziale di nodo effettivamente incognito è e_2 . L'equazione per il potenziale di nodo e_2 può essere determinata procedendo in questo modo. Per ogni bipolo collegato al nodo "2" è possibile esprimere l'intensità di corrente in funzione della tensione e quindi in funzione dei soli potenziali di nodo (l'intensità di corrente del generatore ideale di corrente è nota, il potenziale e_1 è noto),

$$i_1 = \frac{E - e_2}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{e_2}{R_3}. \quad (61)$$

Imponendo, ora, la legge di Kirchhoff per le intensità di corrente al nodo "2" si ottiene l'equazione per e_2

$$-i_1 + i_2 + i_3 - J = 0 \Rightarrow -\frac{E - e_2}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_2}{R_3} - J = 0. \quad (62)$$

Risolvendo l'equazione (1186) si ottiene

$$e_2 = E + \frac{J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}. \quad (63)$$

Sostituendo in questa espressione i valori riportati in Tabella. 2.7 si ha

$$e_2 = 4,4 \text{ V}. \quad (64)$$

Ora siamo in grado di determinare tutte le altre grandezze incognite. Basta sostituire il valore di e_2 appena determinato nelle espressioni (61) per determinare le intensità di corrente i_1 , i_2 e i_3 . Utilizzando, poi, l'equazione di Kirchhoff (49) si determina l'intensità di corrente i_4 . Infine, le tensioni di ciascun bipolo si determinano utilizzando le equazioni (50)-(54), che esprimono le tensioni in funzione dei potenziali.

Osservazione

Nella procedura di riduzione, l'equazione di Kirchhoff per le correnti al nodo "1" non può essere utilizzata per determinare l'equazione per il potenziale e_2 perché in essa compare l'intensità di corrente i_4 del generatore ideale di tensione. L'equazione caratteristica del generatore ideale di tensione non impone alcun legame tra l'intensità di corrente del generatore e la tensione (il generatore ideale di tensione è controllato solo in corrente). L'equazione di Kirchhoff al nodo "1" (o quella al nodo "3") serve solo per determinare l'intensità di corrente i_4 nel generatore ideale di tensione, una volta note le altre intensità di corrente.

Come si procede nella riduzione se nel circuito ci sono più generatori indipendenti di tensione? Ad esempio, a ciascun nodo del circuito è connesso almeno un generatore ideale di tensione. Si consideri il circuito di Figura 3.25 (i parametri sono gli stessi che abbiamo riportato in Tabella 2.7).

Ovviamente, possiamo scrivere le equazioni di tableau del circuito, e risolverle, poi, con il metodo della riduzione per sostituzione. Noi, ora, risolveremo questo circuito senza scrivere l'intero sistema di equazioni di tableau. Anche in questo circuito il valore del potenziale e_1 è noto, perché il generatore ideale di tensione impone la tensione (abbiamo di nuovo scelto il nodo "3" come nodo di riferimento e, quindi, $e_3 = 0$),

$$e_1 = E. \quad (65)$$

Inoltre, siccome i nodi "2" e "3" sono collegati direttamente attraverso un generatore ideale di tensione si ha

$$e_4 - e_2 = E. \quad (66)$$

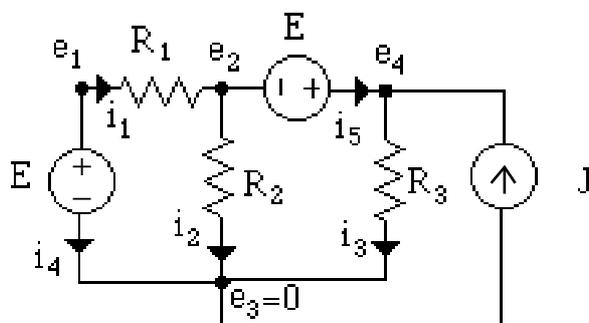


Fig. 3.25 In questo circuito ad ogni nodo è collegato un generatore di tensione.

I potenziali incogniti sono tre, manca ancora un'equazione. Questa equazione, a differenza del caso esaminato in precedenza, non può essere ottenuta direttamente applicando la legge di Kirchhoff per le correnti a un nodo del circuito, perché ad ogni nodo è collegato un generatore ideale di tensione. Ricordatevi che non è possibile esprimere l'intensità di corrente di un generatore ideale di tensione in funzione della tensione utilizzando l'equazione caratteristica. L'equazione mancante deve essere una equazione che deriva dalla legge di Kirchhoff per le correnti, in cui non devono comparire le intensità di corrente dei generatori di tensione. Questa equazione può essere ottenuta considerando un insieme di taglio del circuito privo di generatori di tensione. Nel caso in esame un insieme di taglio di questo tipo è costituito dai resistori "1", "2" e "3" e dal generatore di corrente. Per questo insieme di taglio l'equazione per le correnti è

$$i_1 - i_2 - i_3 + J = 0. \quad (67)$$

Osserviamo che l'equazione (67) può essere ottenuta attraverso un'opportuna combinazione lineare delle equazioni di Kirchhoff ai nodi "2" e "4",

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_5 &= 0, \\ i_3 - i_5 - J &= 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Dall'equazione (67), utilizzando le equazioni caratteristiche dei resistori e le relazioni che esprimono le tensioni in funzione dei potenziali, otteniamo l'equazione mancante per i potenziali di nodo,

$$\frac{E}{R_1} - \frac{e_2}{R_2} - \frac{e_4}{R_3} + J = 0. \quad (69)$$

Sostituendo in questa equazione l'espressione di e_4 che si ottiene dall'equazione (66) si ha per e_2 l'espressione

$$e_2 = \frac{J}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} + E \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}. \quad (70)$$

La difficoltà che abbiamo appena incontrato nasce perché vogliamo ridurre il sistema di equazioni di *tableau* alle sole equazioni per i potenziali di nodo; se risolvessimo direttamente le equazioni di *tableau* non incontreremmo nessuna difficoltà di questo tipo.

Per risolvere questo problema non bisogna ricorrere necessariamente agli insiemi di taglio. E' sufficiente, nella procedura di riduzione, conservare come incognite, oltre ai potenziali di nodo, anche tutte le intensità di corrente dei generatori ideali di tensione. In questo modo otteniamo un sistema di $(n-1) + p$ equazioni (p è il numero generatori ideali di tensione) nelle $(n-1) + p$ incognite costituite dagli $(n-1)$ potenziali di nodo e dalle p intensità di corrente che attraversano i generatori ideali di tensione. Le equazioni sono ottenute aggiungendo alle $(n-1)$ equazioni di Kirchhoff per le correnti le p equazioni costitutive dei generatori ideali di tensione. Questa procedura di riduzione prende il nome di *metodo dei potenziali di nodo modificati*.

◆

3.9 Correnti di maglia

Le equazioni circuitali possono essere riformulate in modo tale che le leggi di Kirchhoff per le correnti siano imposte naturalmente. Il metodo si fonda sull'introduzione di $(b-n+1)$ variabili ausiliarie, dette *correnti di maglia*. Si consideri un circuito, il grafo corrispondente e un insieme di maglie fondamentali orientate (arbitrariamente), Figura 3.26. A ogni maglia fondamentale orientata del circuito si associ una corrente di maglia e a ciascuna corrente di maglia si assegni un verso di riferimento concorde con l'orientazione scelta per la maglia.

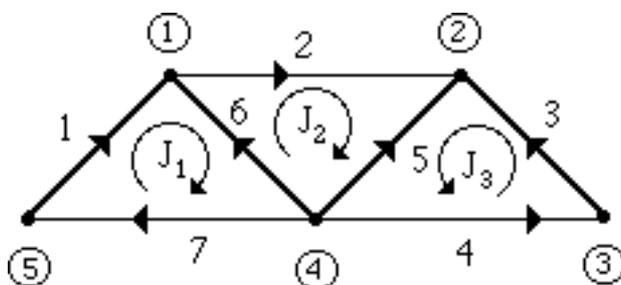


Fig. 3.26 Un grafo, un albero (lati a tratto spesso) e le correnti di maglia corrispondenti alle maglie fondamentali associate all'albero scelto.

Innanzitutto stabiliamo che una data corrente di maglia “circola” in un dato lato se il lato appartiene alla maglia fondamentale a cui la corrente di maglia è associata. È evidente che, in generale, più di una corrente di maglia circola in un dato lato, perché il lato può appartenere a più di una maglia fondamentale. Si assuma, ora, che l'intensità di corrente del lato possa essere espressa come somma algebrica di tutte le correnti di maglia che “circolano” in quel lato, prendendo con il segno + tutte le correnti di maglia con versi di riferimento concordi con quello dell'intensità di corrente di lato e con il segno – tutte le correnti di maglia che hanno versi di riferimento discordi,

$$i_k = \sum_h (\pm) J_h. \quad (71)$$

Si consideri, ad esempio, il circuito il cui grafo orientato (concordemente con i versi di riferimento delle intensità di corrente) è riportato in Figura 3.26. È stato scelto un albero (lati a tratto spesso) e sono indicate le correnti di maglia J_1 , J_2 e J_3 associate alle maglie fondamentali corrispondenti all'albero scelto. Le intensità di corrente di lato sono espresse tramite le correnti di maglia nel seguente modo

$$\begin{aligned} i_1 &= J_1, \quad i_2 = J_2, \quad i_3 = J_3, \quad i_4 = J_3, \\ i_5 &= -J_2 - J_3, \quad i_6 = -J_1 + J_2, \quad i_7 = J_1. \end{aligned} \quad (72)$$

È immediato verificare che le intensità delle correnti espresse attraverso le (72) verificano la prima legge di Kirchhoff, indipendentemente dai valori delle correnti di maglia.

A ogni nodo sono collegati due lati di ogni maglia fondamentale a cui il nodo appartiene e ogni intensità di corrente ausiliaria “circola” nella maglia fondamentale corrispondente. Di conseguenza ogni corrente di maglia compare due e due sole volte in ogni equazione di Kirchhoff per le correnti, una volta con il segno positivo e una volta con il segno negativo. Pertanto le intensità delle correnti espresse attraverso le (72) verificano automaticamente la legge di Kirchhoff per le correnti indipendentemente dai valori delle correnti di maglia J_1 , J_2 e J_3 .

Si consideri, ad esempio, l'equazione di Kirchhoff per il nodo “1” del circuito il cui grafo è riportato in Figura 3.26, a cui sono collegati i lati 1, 6 e 2. La corrente di maglia J_1 è “entrante” nel nodo quando circola nel lato 1, mentre è “uscente” quando circola nel lato 6; la corrente di maglia J_2 è “entrante”

quando circola nel lato 6 ed è “uscente” quando circola nel lato 2. L’equazione di Kirchhoff per il nodo “1”,

$$-i_1 + i_2 - i_6 = 0 \quad (73)$$

diventa l’identità

$$J_1 - J_2 + (-J_1 + J_2) = 0, \quad (74)$$

una volta che le intensità di corrente dei lati sono state espresse tramite le correnti di maglia.

La formulazione basata sulle correnti di maglia è poco vantaggiosa rispetto a quella basata sui potenziali di nodo, a causa dell’elevato costo computazionale richiesto per determinazione di un insieme di maglie fondamentali.

Osservazione

Le correnti di maglia, nel caso di un grafo planare, possono essere definite anche per gli $(l - n + 1)$ anelli. L’intensità di corrente di ciascun lato può essere espressa attraverso la somma algebrica delle correnti di anello che “circolano” nel lato (ambiscono il lato).



Anche per le correnti di maglia si pone la questione fondamentale (che si è posta per i potenziali di nodo), riguardante la possibilità di poter sempre rappresentare tutte le intensità di corrente di lato di un circuito attraverso le correnti di maglia. Siccome le intensità di corrente di lato devono verificare l’equazione di Kirchhoff per le correnti, esiste sempre un insieme di correnti di maglia attraverso le quali è possibile esprimere le intensità di corrente di lato del circuito secondo la regola che prima abbiamo definito. Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa proprietà. Si osservi, inoltre, che in un dato circuito esistono diversi insiemi di maglie fondamentali e, quindi, esistono diversi insiemi di correnti di maglia in grado di rappresentare un dato insieme di intensità di corrente di lato.

Una volta scelto un insieme di correnti di maglia, per determinarle bisogna prima esprimere tutte le intensità di corrente di lato in funzione delle correnti di maglia, poi esprimere le tensioni dei bipoli controllati in corrente in

funzione delle correnti di maglia e infine imporre le leggi di Kirchhoff per le tensioni. Questa è la procedura duale a quella che abbiamo descritto quando abbiamo trattato il problema del calcolo dei potenziali di nodo.

Problema

Si risolva il circuito riportato in Figura 3.24 e il circuito riportato in Figura 3.25 con il metodo delle correnti di maglia.

◆

3.10 Conservazione delle potenze elettriche

Ora illustreremo una importante proprietà dei circuiti: la conservazione delle potenze elettriche. Si consideri un circuito C con l bipoli e siano i_1, i_2, \dots, i_l le intensità delle correnti e v_1, v_2, \dots, v_l le tensioni; per ogni bipolo i riferimenti per i versi dell'intensità di corrente e della tensione siano scelti, ad esempio, in base alla convenzione dell'utilizzatore (Figura 3.27a). La potenza elettrica assorbita dal k -esimo bipolo ($k = 1, 2, \dots, l$) del circuito è

$$p_k(t) = i_k(t)v_k(t). \quad (75)$$

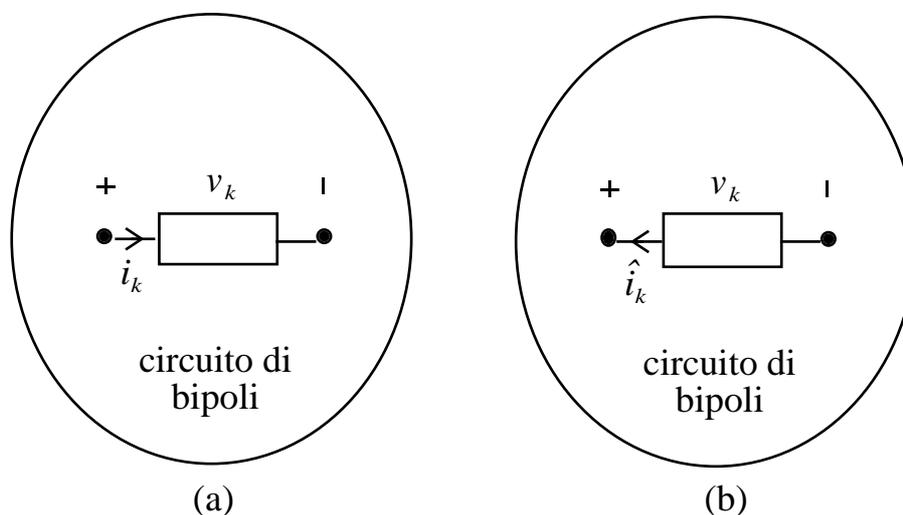


Fig. 3.27 (a) Convenzione dell'utilizzatore e (b) convenzione del generatore.

Conservazione delle potenze elettriche

La somma delle potenze elettriche assorbite dai bipoli di un circuito è istante per istante uguale a zero,

$$\sum_{k=1}^l p_k(t) = \sum_{k=1}^l i_k(t)v_k(t) = 0. \quad (76)$$

◆

Questa proprietà, come ora faremo vedere, è solo conseguenza del fatto che le intensità di corrente e le tensioni del circuito devono verificare le leggi di Kirchhoff. Essa, quindi, non dipende in alcun modo dalla natura specifica dei singoli elementi circuitali, e quindi, dalle relazioni caratteristiche dei singoli elementi.

Dimostrazione

Questa proprietà può essere dimostrata in modo semplice utilizzando i potenziali di nodo. Si introduca il vettore colonna $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$ rappresentativo di tutte le intensità di corrente del circuito, il vettore colonna $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$ rappresentativo di tutte le tensioni del circuito e il vettore colonna $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})^T$ rappresentativo dei potenziali di nodo del circuito, avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo “ n ”, $e_n = 0$. L’espressione della somma delle potenze assorbite dai bipoli del circuito può essere così rappresentata:

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_n i_n = \mathbf{v}^T \mathbf{i}. \quad (77)$$

Dunque, la somma delle potenze elettriche assorbite è uguale al prodotto del vettore riga \mathbf{v}^T con il vettore colonna \mathbf{i} , secondo la regola “righe \times colonne”. Le tensioni del circuito possono essere rappresentate attraverso i potenziali di nodo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}, \quad (78)$$

dove A è la matrice di incidenza ridotta del circuito (ottenuta non riportando la riga corrispondente al nodo “ n ”). Sostituendo la (78) nella (77) si ha:

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{A}^T \mathbf{e})^T \mathbf{i}. \quad (79)$$

Ricordiamo che: vale l'identità

$$(\mathbf{P}\mathbf{a})^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}^T, \quad (80)$$

dove \mathbf{P} e \mathbf{a} sono, rispettivamente, una generica matrice $p \times m$ e un generico vettore colonna con m righe; per definizione di trasposta di una matrice si ha che

$$(\mathbf{Q}^T)^T = \mathbf{Q}; \quad (81)$$

vale la proprietà associativa del prodotto riga \times colonna,

$$(\mathbf{a}^T \mathbf{Q}) \mathbf{b} = \mathbf{a}^T (\mathbf{Q} \mathbf{b}). \quad (82)$$

Utilizzando queste proprietà si ha che la (79) può essere così riscritta come

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A} \mathbf{i}). \quad (83)$$

Siccome la legge di Kirchhoff per le correnti impone che $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$, dalla (83) si ha

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0. \quad (84)$$

◆

Esempio

Si consideri il circuito di Figura 3.28 (per ogni bipolo è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore Figura 3.28a) e si scriva la conservazione delle potenze. Si ha

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 = 0. \quad (85)$$

È evidente che i termini a primo membro nella (85) non possono avere lo stesso segno (a meno che non siano tutti nulli; ciò è certamente impossibile se nel circuito non esistono correnti). Quindi, alcuni termini sono positivi e altri sono negativi nell'espressione (85). In ogni circuito la potenza assorbita da alcuni bipoli è positiva e da altri è negativa.

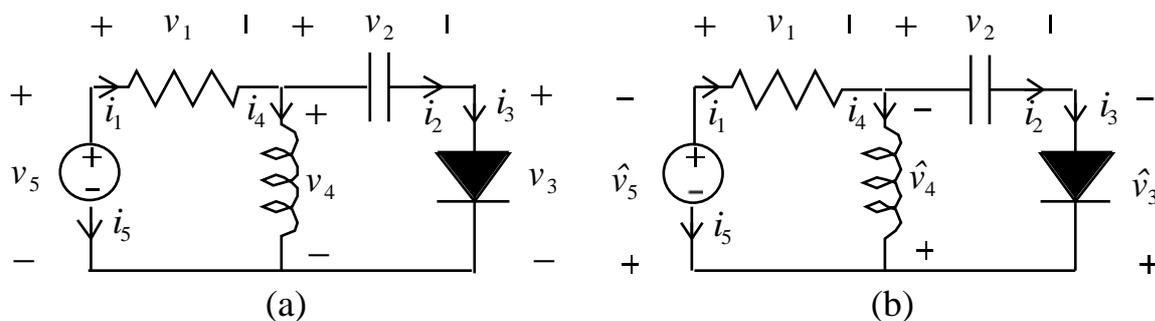


Fig. 3.28 (a) Per tutti i bipoli è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore; (b) per alcuni bipoli è stata fatta la convenzione del generatore.

Se per tutti i bipoli del circuito si adotta la convenzione del generatore (Figura 3.28b) abbiamo che la somma delle potenze elettriche generate da tutti i bipoli della rete è uguale a zero.

È possibile scrivere la conservazione delle potenze elettriche anche quando per alcuni bipoli si fa la convenzione dell'utilizzatore e per altri, invece, la convenzione del generatore, Figura 3.28b. Partendo dalla (85) e osservando che

$$\hat{v}_3 = -v_3, \quad \hat{v}_4 = -v_4 \quad \text{e} \quad \hat{v}_5 = -v_5, \quad (86)$$

si perviene a

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \hat{v}_3 i_3 + \hat{v}_4 i_4 + \hat{v}_5 i_5 \Rightarrow p_1 + p_2 = \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5. \quad (87)$$

La somma delle potenze assorbite dal resistore e dal condensatore è uguale alla somma delle potenze erogate dal generatore ideale di tensione, dall'induttore e dal diodo; con il simbolo \hat{p} abbiamo indicato la potenza erogata.

In generale, in ogni circuito la somma delle potenze assorbite da un certo insieme di bipoli è uguale, istante per istante, alla somma delle potenze erogate dalla restante parte dei bipoli, cioè

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i = \sum_{j=\alpha+1}^b \hat{p}_j. \quad (88)$$

3.11 Teorema di Tellegen

La proprietà della conservazione delle potenze elettriche, discussa nel precedente paragrafo, è una diretta conseguenza delle sole leggi di Kirchhoff. In conseguenza di ciò, come ora mostreremo, questa proprietà vale anche quando, invece, della potenza elettrica si considera la *potenza virtuale*. Come vedremo la potenza elettrica è un caso particolare di potenza virtuale.

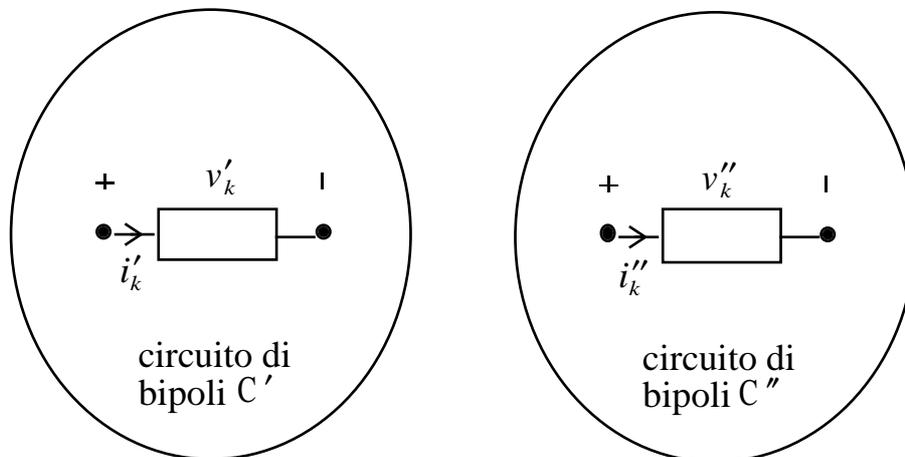


Fig. 3.29 Due circuiti diversi che hanno lo stesso grafo

Si considerino due circuiti che hanno lo stesso grafo orientato e, in generale, elementi diversi; siano l i lati del grafo; i lati sono stati orientati concordemente con i versi di riferimenti delle intensità di corrente, Figura 3.29. Per esemplificare, si faccia riferimento all'esempio concreto illustrato in Figura 3.30.

Il primo circuito è indicato con C' e il secondo con C'' . Si usi per entrambi i circuiti e per ciascun lato la convenzione dell'utilizzatore. Siano i'_1, i'_2, \dots, i'_l le intensità di corrente e v'_1, v'_2, \dots, v'_l le tensioni del circuito C' e $i''_1, i''_2, \dots, i''_l$ le intensità di corrente e $v''_1, v''_2, \dots, v''_l$ le tensioni del circuito C'' . Le matrici di incidenza dei due circuiti sono uguali perché hanno lo stesso grafo e le si indichi con A .

Si considerino, ora, le intensità di corrente del circuito C' e le tensioni del circuito C'' (o viceversa). Per il k -esimo lato ($k = 1, 2, \dots, l$) del grafo dei due circuiti si definisce la *potenza virtuale assorbita* dal lato come

$$P_k = i'_k v''_k. \quad (89)$$

Alla grandezza così definita si dà il nome di “potenza” perché essa è dimensionalmente omogenea con una potenza. L'aggettivo “virtuale” sta a indicare che la grandezza definita non ha nessun significato fisico, perché le intensità di corrente sono del circuito C' e le tensioni sono del circuito C'' (o viceversa) e tra esse non intercorre alcuna relazione; l'aggettivo “assorbita” sta a indicare che il prodotto è tra una tensione e un'intensità di corrente i cui riferimenti per i versi sono scelti con la convenzione dell'utilizzatore.

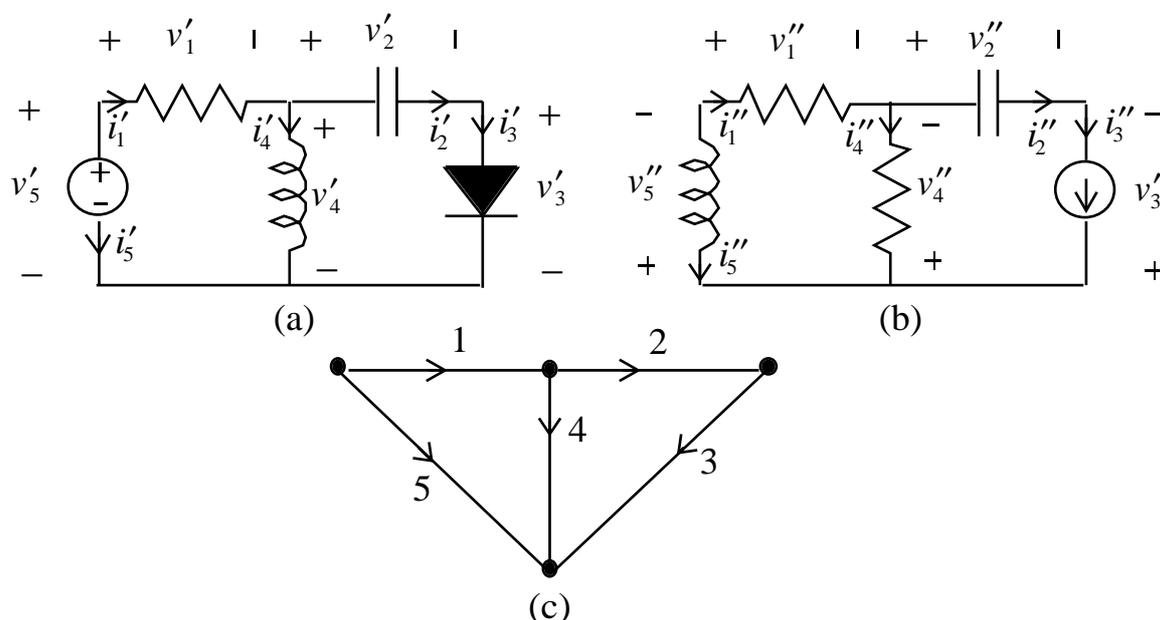


Fig. 3.30 Un esempio di due circuiti diversi che hanno lo stesso grafo.

Teorema di Tellegen (*o teorema della conservazione delle potenze virtuali*)

Si considerino due circuiti C' e C'' che hanno lo stesso grafo orientato. La somma delle potenze virtuali assorbite (erogate) da ciascun lato del grafo è uguale a zero, cioè

$$\sum_{k=1}^b i'_k v''_k = 0. \quad (90)$$

◆

La dimostrazione di questa proprietà è diretta conseguenza delle sole leggi di Kirchhoff ed è simile a quella viene presentata nel precedente paragrafo per dimostrare la conservazione delle potenze elettriche. La lasciamo al lettore come esercizio.

È evidente che quando gli elementi dei due circuiti C' e C'' sono uguali e gli elementi dinamici hanno le stesse condizioni iniziali, la potenza virtuale coincide con la potenza elettrica.

Osservazione

L'equazione (90) è di particolare interesse: tra le intensità di corrente i'_1, i'_2, \dots, i'_l e le tensioni $v''_1, v''_2, \dots, v''_l$ non sussiste alcuna relazione, se non quella di fare riferimento allo stesso grafo orientato e soddisfare indipendentemente le leggi di Kirchhoff. Il teorema di Tellegen discende unicamente dalle leggi di Kirchhoff. È interessante notare che una delle due leggi di Kirchhoff, unita al teorema di Tellegen, implica l'altra legge. Si può dimostrare che:

- se per ogni insieme delle tensioni del circuito che verificano le leggi di Kirchhoff è verificata la conservazione delle potenze virtuali, allora le intensità di corrente del circuito verificano naturalmente le leggi di Kirchhoff;
- se per ogni insieme delle intensità di corrente del circuito che verificano le leggi di Kirchhoff è verificata la conservazione delle potenze virtuali, allora le tensioni del circuito verificano naturalmente le leggi di Kirchhoff.

◆

Se si usa la convenzione del generatore, allora al prodotto tra la tensione e l'intensità della corrente

$$\hat{P}_k = i'_k \hat{v}''_k, \quad (91)$$

dove $\hat{v}''_k = -v''_k$, si dà il nome di *potenza virtuale erogata*.

