

## CAPITOLO 2

### ANALISI DI CIRCUITI SEMPLICI

#### 2.1 Introduzione

Il quadro del modello circuitale è, almeno per quanto concerne i circuiti di bipoli, a questo punto, completo. Esso è così costituito dai:

- *Concetti fondamentali:*
  - l'intensità della corrente elettrica che attraversa il bipolo;
  - la tensione elettrica del bipolo;
- *Leggi fondamentali:*
  - legge di Kirchhoff per le correnti;
  - legge di Kirchhoff per le tensioni;
- *Relazioni caratteristiche.*

Tutto ciò che d'ora in avanti si dirà sarà stretta conseguenza di questo "quadro". Nel Capitolo 5 faremo vedere che questo quadro si estende naturalmente, senza alcuna difficoltà e limitazione, ai circuiti che contengono componenti con più di due terminali.

In un circuito il funzionamento di ogni singolo bipolo è, in ogni istante, determinato dalla interazione tra il bipolo stesso e il resto del circuito. In altre parole, si può dire che esso è il frutto della interazione tra due diverse esigenze: che il bipolo si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che

tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri bipoli presenti nel circuito.

Le relazioni caratteristiche descrivono il funzionamento dei singoli bipoli del circuito e le leggi di Kirchhoff ne regolano l'interazione. Le equazioni che ne derivano sono le *equazioni circuitali*. Esse sono l'oggetto del nostro studio. In particolare, studieremo le proprietà fondamentali di queste equazioni e i loro metodi di soluzione.

Le equazioni di Kirchhoff, che dipendono solo da come gli elementi circuitali sono collegati tra loro e non dalla loro specifica natura, sono algebriche lineari e omogenee.

Le equazioni caratteristiche, che dipendono solo dalla natura fisica dei singoli elementi del circuito e non da come sono tra loro collegati, possono essere, invece, di diverso tipo, a seconda della natura fisica dei componenti che esse descrivono: ad esempio, algebriche lineari, algebriche non lineari, differenziali lineari, differenziali non lineari. Quindi, la soluzione delle equazioni di un circuito presenta difficoltà che dipendono non solo dal numero di elementi presenti e dal modo in cui essi sono collegati, ma anche dalla loro natura.

I circuiti possono essere classificati in due grandi categorie: *circuiti resistivi* e *circuiti dinamici*.

Un circuito si dice *resistivo* se è costituito da soli generatori e resistori (lineari e non lineari), cioè da soli elementi adinamici.

Un circuito si dice *dinamico* se, oltre a generatori e a resistori, contiene anche elementi dinamici come, ad esempio, induttori e condensatori. L'ordine di un circuito dinamico è, per definizione, il numero di bipoli dinamici "indipendenti"<sup>1</sup> presenti nel circuito. Ad esempio, un circuito dinamico del primo ordine è un circuito con un solo bipolo dinamico, ad esempio, un condensatore o un induttore; un circuito dinamico del secondo ordine è un circuito con due bipoli dinamici, ad esempio un condensatore e un induttore, o due condensatori, o due induttori; e così via.

Allo scopo di illustrare i possibili tipi di equazioni circuitali, le difficoltà derivanti solo dalla natura dei bipoli che compongono il circuito e i metodi di soluzione, in questo Capitolo considereremo solo circuiti topologicamente semplici<sup>2</sup>. Prima studieremo un circuito con due resistori lineari e un generatore

<sup>1</sup> Due induttori sono "indipendenti" se non sono collegati in serie; due condensatori sono "indipendenti" se non sono collegati in parallelo.

<sup>2</sup> La *topologia* di un circuito concerne quelle proprietà del circuito che dipendono dal modo in cui i bipoli sono tra loro collegati e non la loro specifica natura fisica.

ideale, poi estenderemo lo studio al caso in cui uno dei due resistori è non lineare. Successivamente considereremo un circuito dinamico del primo ordine lineare composto da un condensatore (o induttore), un resistore e un generatore ideale. Lo studio viene poi esteso al caso in cui in parallelo al condensatore è collegato un resistore non lineare. Infine, analizzeremo un circuito del secondo ordine lineare composto da un induttore, un condensatore, un resistore e un generatore ideale.

Nel Capitolo successivo, invece, studieremo le proprietà delle equazioni circuitali derivanti unicamente dalla struttura peculiare delle equazioni di Kirchhoff. Attraverso queste proprietà, come vedremo, sarà possibile affrontare e risolvere i problemi che nascono dalla complessità delle equazioni circuitali dovuta al numero di bipoli presenti e al modo in cui essi sono tra loro collegati.

## 2.2 Circuito resistivo lineare “semplice”

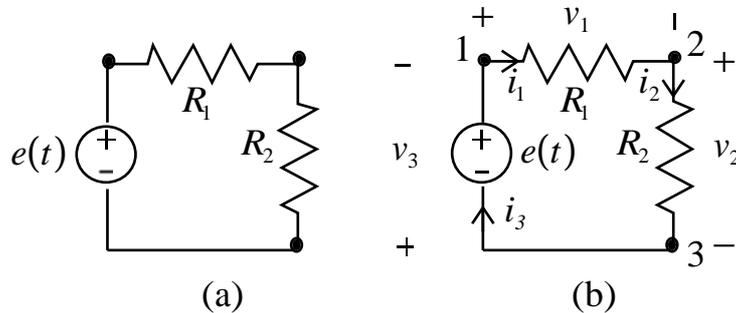
In questo paragrafo e nei prossimi tre, attraverso quattro esempi, evidenzieremo le tipologie più importanti di equazioni che si incontrano nella soluzione di circuiti. Ciascuno di essi esemplifica una classe di circuiti di particolare interesse teorico e applicativo.

L’obiettivo principale di questa esemplificazione è sostanzialmente quello di cominciare a familiarizzare con la soluzione delle equazioni circuitali, iniziando a risolvere circuiti “semplici” (e significativi) e poi, man mano, proseguendo con circuiti sempre più complessi. In questo modo faremo anche una prima rassegna dei metodi matematici che si utilizzano per la soluzione delle equazioni circuitali.

Considereremo prima un circuito resistivo lineare, poi un circuito resistivo non lineare, poi un circuito dinamico lineare tempo invariante con generatore costante, poi lo stesso circuito dinamico con generatore sinusoidale e, infine, un circuito dinamico tempo invariante non lineare.

Un circuito resistivo lineare è un circuito costituito da resistori lineari e da generatori ideali (più in generale da elementi dinamici lineari e generatori). Si consideri, ad esempio, il circuito illustrato in Figura 2.1a. Esso è costituito da due resistori lineari, di resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , connessi in serie. Due bipoli sono connessi in serie, se sono gli unici bipoli incidenti allo stesso nodo. La serie di due resistori è collegata, a sua volta, a un generatore indipendente di tensione. Questo è l’esempio significativo più semplice di circuito resistivo lineare. Si

determinino le intensità di corrente e le tensioni del circuito e la potenza elettrica erogata dal generatore di tensione.



**Fig. 2.1** (a) Esempio di circuito resistivo lineare; (b) corrispondente “circuito orientato”.

Il circuito è costituito da tre bipoli e da tre nodi. Le incognite sono le tre intensità di corrente  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e le tre tensioni  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ . Ricordate, la prima operazione che bisogna effettuare quando si imposta la soluzione di un circuito è assegnare i versi di riferimento per le intensità di corrente e le tensioni. È una buona regola adottare per ciascun bipolo del circuito la stessa convenzione, ad esempio, quella dell’utente. Di conseguenza, una volta stabiliti, ad esempio, i versi di riferimento per le intensità di corrente, sono automaticamente fissati anche i versi di riferimenti per le tensioni (e viceversa). Si fissino i riferimenti per i versi delle intensità di corrente così come è indicato in Figura 2.1b, e si adoperi per ciascun bipolo la convenzione dell’utente. In realtà, la tensione del generatore di tensione, a differenza dell’intensità di corrente, non è incognita, anche se, almeno formalmente, qualche volta conviene considerarla come tale.

Dopo che sono stati definiti i versi di riferimento, si possono determinare le equazioni del circuito. Si determinino prima le equazioni di Kirchhoff. Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo “1” e al nodo “2” otteniamo:

$$i_1 - i_3 = 0 \quad (1)$$

$$-i_1 + i_2 = 0 \quad (2)$$

L’equazione di Kirchhoff per il nodo “3” è  $-i_2 + i_3 = 0$ , ovvero

$$i_2 - i_3 = 0 \quad (3)$$

Quest'ultima equazione non contiene ulteriori informazioni oltre a quelle già contenute nelle equazioni (1) e (2). Infatti, l'equazione (3) può essere ottenuta sommando membro a membro le equazioni (1) e (2). Come si usa dire, l'equazione (3) è una combinazione lineare delle equazioni (1) e (2), ovvero le equazioni (1), (2) e (3) sono linearmente dipendenti<sup>3</sup>. Di conseguenza non c'è bisogno di considerare l'equazione (3) nello studio del circuito in esame. È evidente che non c'è nessun motivo particolare per cui tra le tre equazioni (1), (2) e (3) scegliamo di usare le prime due e ignoriamo la terza. Potremmo, ovviamente, usare la prima e la terza e ignorare la seconda, oppure usare la seconda e la terza e ignorare la prima.

Dalle equazioni (1) e (2) abbiamo immediatamente che

$$i_1 = i_2 = i_3. \quad (4)$$

Le intensità di corrente nei tre bipoli sono uguali perché sono collegati in serie (se i versi di riferimento sono quelli scelti in Figura 2.1; otterremmo lo stesso risultato se cambiassimo i versi di riferimento di tutte e tre le intensità di corrente).

Siccome i tre bipoli del circuito sono collegati in serie, il circuito in esame ha una sola maglia. Orientiamo la maglia in verso orario e applichiamo la legge di Kirchhoff per le tensioni. Abbiamo:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0. \quad (5)$$

Ora dobbiamo considerare le equazioni caratteristiche dei bipoli del circuito, facendo attenzione al fatto che abbiamo usato la convenzione dell'utilizzatore per ciascun bipolo. Esse sono:

---

<sup>3</sup> L'equazione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$  si dice lineare se  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  è una funzione lineare delle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cioè se  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ , dove  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sono coefficienti che non dipendono dalle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $b$  è una grandezza nota indipendente dalle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Un'equazione lineare è omogenea quando il termine noto è uguale a zero. Si consideri l'insieme delle  $m$  equazioni lineari e omogenee  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \dots + \alpha_{jn} x_n = 0$ , con  $j = 1, 2, \dots, m$ . Le equazioni di questo insieme si dicono linearmente dipendenti se e solo se esiste almeno un insieme di  $m$  di costanti,  $k_1, k_2, \dots, k_m$  (almeno due di esse devono essere diverse da zero), tali che  $\sum_{j=1}^m k_j f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  per ogni  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . L'equazione di questo insieme si dicono linearmente indipendenti se e solo se non sono linearmente dipendenti.

$$v_1 - R_1 i_1 = 0, \quad (6)$$

$$v_2 - R_2 i_2 = 0, \quad (7)$$

$$v_3 = -e. \quad (8)$$

Nell'equazione caratteristica del generatore di tensione compare il segno meno perché il verso di riferimento della tensione  $v_3$  è, per come è stato scelto, opposto al verso di riferimento della tensione  $e$  impressa dal generatore di tensione.

Le equazioni (1), (2), (5), (6), (7) e (8) sono le equazioni del circuito in esame: esse sono sei equazioni algebriche lineari, linearmente indipendenti, nelle sei incognite  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ . La soluzione di questo sistema è semplice, basta applicare il metodo della *riduzione per sostituzione* o *metodo di Gauss*.

Sostituendo le espressioni di  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  date dalle equazioni (6), (7) e (8) nell'equazione (5) abbiamo

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 - e = 0. \quad (9)$$

Utilizzando le relazioni (4), dall'equazione (9) si ha

$$(R_1 + R_2) i_1 = e. \quad (10)$$

Questa è un'equazione algebrica lineare<sup>4</sup> nell'incognita  $i_1$ . La sua soluzione è

$$i_1 = \frac{e}{R_1 + R_2}. \quad (11)$$

Utilizzando, ora, le (6) e (7), dalla (11) si ha

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e, \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e. \quad (12)$$

---

<sup>4</sup> L'equazione  $f(x) = b$  ( $b$  è una grandezza nota, quindi indipendente dalla grandezza incognita  $x$ ) si dice algebrica se  $f(\cdot)$  è una funzione della variabile  $x$ . L'equazione algebrica  $f(x) = b$  si dice lineare se  $f(x)$  è una funzione lineare della variabile  $x$ , cioè  $f(x) = Kx$  dove  $K$  è una costante.

Per determinare la potenza elettrica erogata dal generatore di tensione,  $p_g^{(e)}$ , consideriamo l'intensità della corrente elettrica  $i'_3$  che attraversa il generatore, definita con il verso di riferimento concorde, in base alla convenzione del generatore, con quello della tensione  $v_3$ . E' immediato che

$$i'_3 = -i_3. \quad (13)$$

Allora, si ha

$$p_g^{(e)} = i'_3 v_3 = -i_3 v_3 = i_3 e = \frac{e^2}{R_1 + R_2}. \quad (14)$$

Si osservi che i versi di riferimento dell'intensità di corrente e della tensione impressa  $e$  sono in accordo con la convenzione del generatore. Si assuma che la tensione del generatore ideale di tensione sia, ad esempio, periodica,

$$e(t) = E_0 + E_m \cos(\omega t), \quad (15)$$

e che i valori dei parametri del circuito siano quelli riportati in Tabella 2.1. (La pulsazione  $\omega$  è legata alla frequenza  $f$  dalla relazione  $\omega = 2\pi f$ .)

$R_1 = 1\Omega$	$R_2 = 2\Omega$	$E_0 = 1V$	$E_m = 3V$	$f = 1 \text{ kHz}$
-----------------	-----------------	------------	------------	---------------------

**Tab. 2.1** Parametri del circuito riportato in Fig. 2.1

Otteniamo

$$i_1(t) = i_2(t) = i_3(t) = \frac{1}{3} + \cos(\omega t) \text{ A}, \quad (16)$$

$$v_1(t) = \frac{1}{3} + \cos(\omega t) \text{ V}, \quad (17)$$

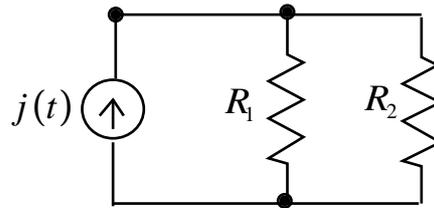
$$v_2(t) = \frac{2}{3} + 2\cos(\omega t) \text{ V}, \quad (18)$$

$$p_g^{(e)}(t) = \frac{1}{3}(1 + 3\cos\omega t)^2 \text{ W} = 5,5 + 6\cos\omega t + 4,5\cos 2\omega t \text{ W}, \quad (19)$$

dove  $\omega = 2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Si osservi che l'espressione della potenza istantanea erogata dal generatore contiene un termine costante, uno sinusoidale a pulsazione  $\omega$  e uno a pulsazione  $2\omega$ .

## Problema

Si determinino le intensità di corrente, le tensioni e la potenza elettrica erogata dal generatore di corrente del circuito resistivo semplice rappresentato in Figura 2.2.



**Fig. 2.2** Esempio di circuito resistivo lineare.

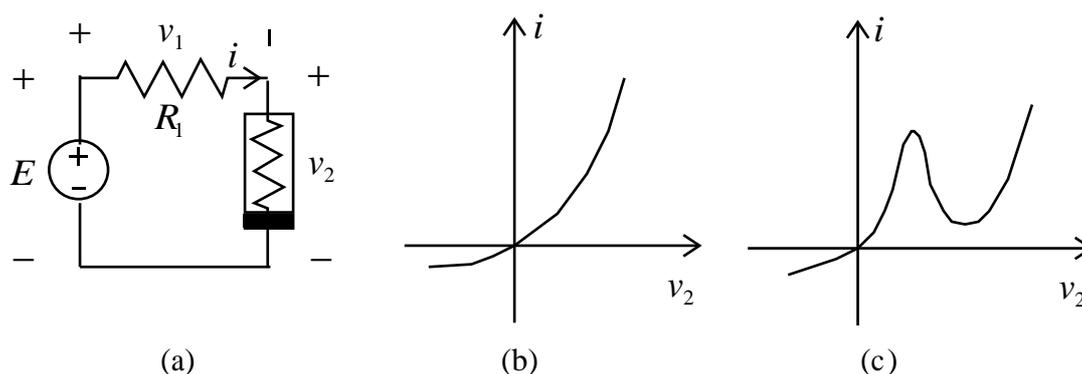
## 2.3 Circuito resistivo non lineare “semplice”

La soluzione di un circuito resistivo lineare si riduce sempre alla soluzione di un sistema di equazioni algebriche lineari. Un qualsiasi sistema di equazioni di questo tipo può essere risolto analiticamente, ad esempio, utilizzando il metodo della riduzione per sostituzione, come abbiamo appena fatto vedere. Se il circuito contiene resistori non lineari bisogna risolvere, invece, un sistema di equazioni costituito, oltre che da equazioni algebriche lineari, anche da equazioni algebriche non lineari, tante quanti sono i bipoli non lineari presenti nel circuito. Ad eccezione di pochissimi casi, la soluzione di equazioni algebriche non lineari (o di sistemi) non può essere effettuata per via analitica. Questa è la prima complicazione dovuta alla presenza di elementi non lineari. Inoltre, può anche accadere che un circuito resistivo non lineare abbia più di una soluzione o, addirittura, non abbia soluzioni. I circuiti resistivi lineari hanno sempre una sola soluzione (se si escludono casi molto particolari). L'esempio che considereremo consentirà di mettere in evidenza tutto ciò in un modo estremamente semplice.

In questo paragrafo illustreremo due metodi approssimati di soluzione di equazioni algebriche non lineari: il *metodo grafico* e il *metodo di Newton-Raphson*.

Un circuito resistivo è non lineare se contiene resistori non lineari. Si consideri, ad esempio, il circuito riportato in Figura 2.3a. Esso è costituito da un resistore

lineare di resistenza  $R$ , da un resistore non lineare e da un generatore ideale di tensione costante. Siccome i tre bipoli sono collegati in serie, le intensità delle correnti elettriche che li attraversano sono uguali, così come abbiamo mostrato nel circuito esaminato in precedenza. Per questa ragione nel disegno riportato in Figura 2.3a è riportata solo l'intensità della corrente  $i$ , con il corrispondente verso di riferimento. In conseguenza di ciò non dobbiamo considerare le equazioni di Kirchhoff per le correnti.



**Fig. 2.3** (a) Esempio di circuito resistivo non lineare; due esempi di curve caratteristiche tipiche di resistori non lineari: (b) diodo a giunzione  $pn$ , (c) diodo tunnel.

Studieremo il circuito in esame considerando due tipi di resistori non lineari: il resistore non lineare con curva caratteristica monotona crescente del tipo riportato in Figura 2.3b (potrebbe essere la curva caratteristica di un diodo a giunzione  $pn$ ), e il resistore non lineare con curva caratteristica non monotona del tipo riportato in Figura 2.3c (potrebbe essere la curva caratteristica di un diodo tunnel). Entrambe le curve caratteristiche possono essere descritte da un'equazione algebrica non lineare del tipo (in entrambi i casi il resistore non lineare è controllato in tensione)

$$i_2 = g(v_2), \quad (20)$$

dove  $g(v_2)$  è una funzione a un solo valore.

Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni all'unica maglia del circuito abbiamo (orientiamo la maglia in verso orario)

$$v_1 + v_2 - E = 0; \quad (21)$$

$E$  è il valore della tensione del generatore. Infine dalla relazione caratteristica del resistore lineare abbiamo l'equazione

$$v_1 - R_1 i = 0. \quad (22)$$

Combinando l'equazione (22) con l'equazione (21) si ottiene

$$R_1 i + v_2 = E. \quad (23)$$

Siamo giunti, così, al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} R_1 i + v_2 = E, \\ i - g(v_2) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

nelle due incognite  $i$  e  $v_2$ . Il sistema di equazioni (24) è un particolare sistema ridotto delle equazioni del circuito in esame. Esso è un sistema di due equazioni algebriche una delle quali è non lineare.

Sostituendo l'espressione di  $i$  in funzione di  $v_2$ , che si ottiene dalla prima equazione del sistema (24), nella seconda equazione, si ha l'equazione algebraica non lineare<sup>5</sup>

$$\frac{v_2}{R_1} + g(v_2) = \frac{E}{R_1}, \quad (25)$$

nell'incognita  $v_2$ . Anche se avessimo scelto di ridurre il sistema (24) a una sola equazione nell'incognita  $i$  avremmo ancora ottenuto un'equazione non lineare. Come già abbiamo osservato, solo in casi molto particolari è possibile risolvere esattamente, attraverso metodi analitici, le equazioni algebriche non lineari. In generale bisogna ricorrere a metodi di soluzione approssimati.

### 2.3.1 Metodo grafico

Il sistema (24) può essere sempre risolto per via grafica.

---

<sup>5</sup> L'equazione  $f(x) = b$  si dice algebraica se  $f(\cdot)$  è una funzione della variabile  $x$ . L'equazione algebrica  $f(x) = b$  si dice non lineare se e solo se  $f(x)$  è una funzione non lineare della variabile  $x$ , come, ad esempio,  $x^2$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\log(x)$ ,  $e^x$ .

Il metodo per la ricerca della soluzione consiste nel riportare la *retta* R descritta dall'equazione lineare (equazione (23)) sul piano  $(v_2, i)$  in cui è tracciata la curva caratteristica G del resistore non lineare (equazione (20)), come illustrato in Figura 2.4.

### Osservazione

La retta R, che in letteratura prende il nome di *retta di carico*, descrive il funzionamento del bipolo costituito dalla serie generatore di tensione - resistore: essa è la curva caratteristica di questo bipolo concorde con la convenzione del generatore.



Al variare del valore della resistenza  $R_1$  varia la pendenza della retta di carico (per fissato valore di  $E$ ), mentre al variare della tensione  $E$  impressa dal generatore la retta trasla parallelamente a se stessa (per fissato valore di  $R_1$ ), Figura 2.4.

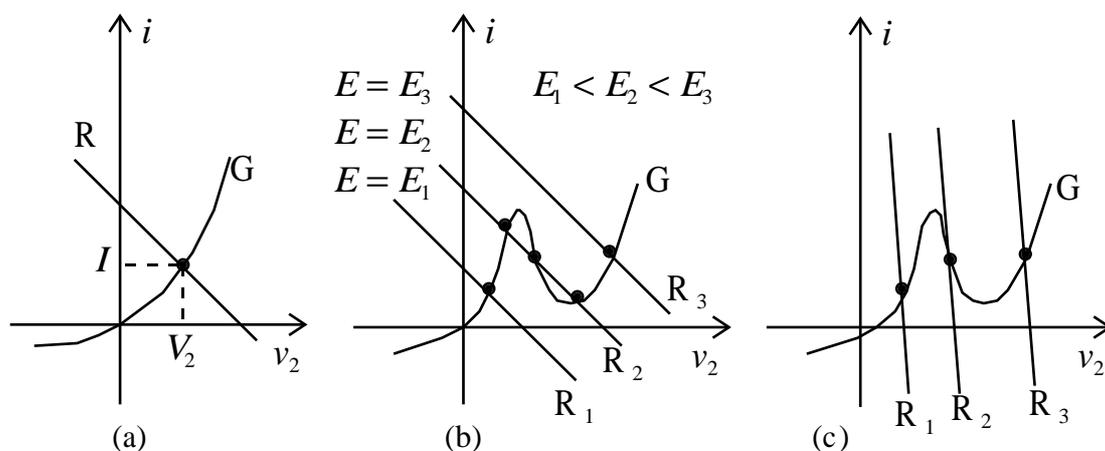
Le intersezioni della retta di carico R con la curva caratteristica del resistore non lineare G individuano dei punti, detti *punti di lavoro*. I valori di intensità di corrente e tensione, che rappresentano le coordinate di questi punti,  $(V_2, I)$ , sono soluzioni del sistema (24), e quindi, soluzioni del circuito. Infatti, le coppie di tensione - corrente  $(v_2, i)$  associate ai punti della retta R sono, per costruzione, soluzioni della prima equazione del sistema (24); le coppie di tensione - corrente  $(v_2, i)$  associate ai punti della curva G sono, per costruzione, soluzioni della seconda equazione del sistema (24). Di conseguenza, le coppie  $(V_2, I)$  corrispondenti ai punti di lavoro, siccome appartengono a entrambe le curve, verificano entrambe le equazioni del sistema (24) e, quindi, sono soluzioni del circuito.

In Figura 2.4 sono riportate le soluzioni, ottenute in questo modo, del circuito di Figura 2.2 corrispondenti alle due curve caratteristiche riportate in Figura 2.2b e Figura 2.2c.

Nel primo caso la curva caratteristica del resistore non lineare è monotona e strettamente crescente, nel secondo caso la curva caratteristica non è monotona in un tratto limitato, dove presenta un massimo e un minimo relativi.

Quando la curva caratteristica è monotona crescente si ha sempre una e una sola intersezione tra la retta di carico e la curva caratteristica del resistore non lineare, e quindi una e una sola soluzione (Figura 2.4a).

Quando la curva caratteristica non è monotona, invece, è anche possibile, per opportuni valori della tensione del generatore, avere tre intersezioni e quindi tre soluzioni (Figura 2.4b). Se la pendenza della retta è, in valore assoluto, sufficientemente elevata, la retta interseca la curva caratteristica sempre in un solo punto, indipendentemente dal valore di  $E$ , anche quando la curva caratteristica non è monotona, Figura 2.4c.



**Fig. 2.4** (a) La retta di carico  $R$  interseca sempre in un solo punto la curva  $G$ ; (b) la retta di carico può intersecare in tre punti la curva  $G$  non monotona; (c) la retta di carico interseca in un solo punto la curva  $G$  non monotona.

Soffermiamoci sul caso in cui ci sono più soluzioni. Cosa significa che un circuito ha più soluzioni? Dal punto di vista matematico è un fatto normale che un'equazione non lineare ammetta più di una soluzione (oppure nessuna soluzione); quando una equazione non lineare ammette una e una sola soluzione è, in realtà, un caso molto particolare. Dal punto di vista fisico, invece, è un assurdo. Infatti, il circuito che potremmo realizzare in laboratorio, collegando in serie un generatore di tensione, un resistore e un diodo tunnel avrà un comportamento deterministico. Il fatto è che il circuito rappresentato in Figura 2.3a è solo un modello approssimato del corrispondente “circuito fisico”. Il circuito fisico, a parità di tensione impressa dal generatore, può raggiungere uno stato di equilibrio invece che un altro a seconda della sua storia, per la presenza di fenomeni dinamici di natura capacitiva nel diodo tunnel, fenomeni che sono assenti nel modello del diodo considerato nel circuito di Figura 2.3. In

conclusione, per poter determinare quale soluzione si realizza effettivamente nei circuiti resistivi che ammettono più di un punto di lavoro, non si possono ignorare i fenomeni dinamici presenti nei resistori non lineari con curve caratteristiche non monotone. Ritourneremo su questa questione nell'esempio sviluppato nel § 2.5.

I circuiti con più punti di lavoro sono molto importanti nelle applicazioni, essi sono alla base dei circuiti bistabili.

### 2.3.2 Metodo di Newton Raphson

Il metodo grafico che abbiamo appena illustrato può fornire soltanto soluzioni molto approssimate (l'errore, ad esempio, introdotto dallo spessore della punta della matita con cui tracciamo la curva caratteristica e la retta di carico). Per ottenere soluzioni accurate è necessario ricorrere a metodi approssimati di tipo numerico.

Il metodo di Newton-Raphson rappresenta il metodo approssimato più comunemente usato per risolvere le equazioni di circuiti resistivi non lineari e consente di raggiungere elevati gradi di precisione. Di seguito sono riportati i concetti essenziali di questo metodo applicandolo al circuito in esame nel caso in cui esso ha una sola soluzione.

Riscriviamo l'equazione (25) come

$$F(v_2) = 0, \quad (26)$$

dove

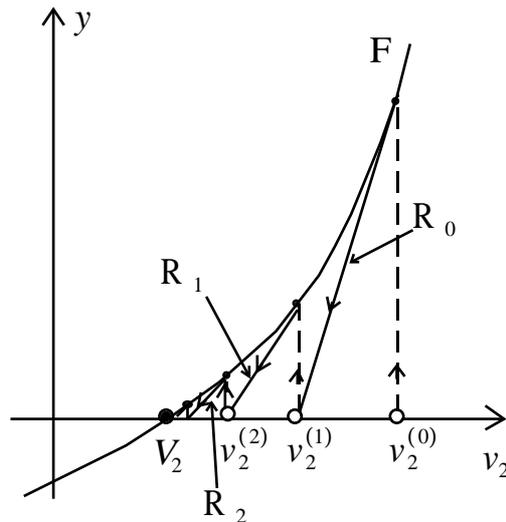
$$F(v_2) \equiv g(v_2) + \frac{v_2 - E}{R_1}. \quad (27)$$

Si consideri la curva  $F$  nel piano  $(v_2, y)$  definita dall'equazione

$$y = F(v_2). \quad (28)$$

La soluzione dell'equazione (26) è l'ascissa  $V_2$  del punto di intersezione tra la curva  $F$  e l'asse delle ascisse, Figura 2.5.

Il metodo di Newton-Raphson è un metodo iterativo <sup>6</sup>. Si sceglie un valore iniziale arbitrario  $v_2^{(0)}$  e si genera una successione di valori  $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}, \dots$  che, come vedremo, tende alla soluzione  $V_2$ . La regola con cui questa successione viene generata è illustrata graficamente in Figura 2.5. Il valore iniziale  $v_2^{(0)}$  potrebbe essere, ad esempio, la soluzione dell'equazione ottenuta ignorando i termini non lineari nell'equazione (26).



**Fig. 2.5** *Descrizione grafica del metodo di Newton-Raphson.*

Una volta scelto il valore di  $v_2^{(0)}$ , si tracci, prima, la retta  $R_0$  tangente alla curva  $F$  nel punto  $(v_2^{(0)}, F(v_2^{(0)}))$ , poi si determini l'intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse, e infine, si assuma l'ascissa di questo punto come valore per  $v_2^{(1)}$ . Si ripeta tale procedimento, tracciando la retta  $R_1$  tangente alla curva  $F$  nel punto  $(v_2^{(1)}, F(v_2^{(1)}))$ , determinando poi l'ascissa del punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse e assumendo infine questa ascissa come valore per  $v_2^{(2)}$ , e così via. In Figura 2.5 è riportata una sequenza  $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}, \dots$  generata attraverso questa procedura. È evidente come essa converga naturalmente verso la soluzione  $V_2$  dell'equazione (26).

Quale è il significato di questa procedura dal punto di vista matematico?

<sup>6</sup> Isac Newton introduce l'idea (1666) per risolvere l'equazione:  $x^3 - 2x - 5 = 0$ ; l'idea è resa "più" algoritmica da Raphson (1690).

Al passo  $h + 1$  ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ) dell'algoritmo di Newton-Raphson si approssima la curva  $F$  con la retta  $R_h$  tangente alla curva  $F$  nel punto  $(v_2^{(h)}, F(v_2^{(h)}))$ , che è descritta dall'equazione

$$y^{(h+1)} = F'(v_2^{(h)})(v_2^{(h+1)} - v_2^{(h)}) + F(v_2^{(h)}); \quad (29)$$

con il simbolo  $F'$  indichiamo la derivata prima della funzione  $F(v_2)$  rispetto a  $v_2$ . La soluzione (di tentativo)  $v_2^{(h+1)}$  si ottiene imponendo che

$$y^{(h+1)} = 0; \quad (30)$$

$v_2^{(h+1)}$  è l'ascissa del punto di intersezione della retta  $R_h$  con l'asse delle ascisse (ricordiamo che la soluzione esatta è l'ascissa del punto di intersezione della curva  $F$  con l'asse delle ascisse). Ciò equivale a sostituire, al generico passo  $h$  della procedura, l'equazione non lineare (26) con l'equazione lineare

$$F'(v_2^{(h)})(v_2^{(h+1)} - v_2^{(h)}) + F(v_2^{(h)}) = 0, \quad (31)$$

la cui soluzione è

$$v_2^{(h+1)} = v_2^{(h)} - \frac{F(v_2^{(h)})}{F'(v_2^{(h)})}; \quad (32)$$

La formula (32) è la formula iterativa dell'algoritmo di Newton-Raphson. Essa è applicata ripetutamente finché la grandezza  $|F(v_2^{(n)})|$ , detto residuo dell'equazione (26), non diventi più piccola (o al limite uguale) di un valore prefissato che sta a indicare l'errore massimo ammissibile nella soluzione del problema in esame. In principio, l'iterazione dovrebbe essere continuata fino a quando il residuo si annulla; in pratica ciò è irrealizzabile perché sono necessarie un numero infinito di iterazioni. Anche se ciò fosse possibile, non avrebbe, ovviamente, nessun importanza dal punto di vista fisico, perché non è possibile misurare e controllare le grandezze fisiche con una precisione illimitata.

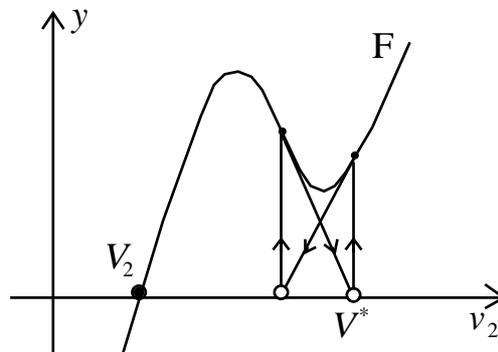
$n$	$v_2^{(h)}$	$ F(v_2^{(n)}) $
0	1/3	1/3
1	5/18	0.0262...
2	0.272616...	0.0001985...
3	0.272577...	0.000000011...

**Tab. 2.2** Metodo di Newton-Raphson applicato all'equazione  $9v_2^3 + 3v_2 - 1 = 0$ .

Si consideri il caso in cui il circuito di Figura 2.3a abbia  $R_1 = 1\Omega$ ,  $E = 1V$  e  $g(v_2) = 2v_2 + 9v_2^3$ . La funzione  $F(v_2)$  vale

$$F(v_2) = 9v_2^3 + 3v_2 - 1. \quad (33)$$

Si scelga  $v_2^{(0)} = 1/3$ ; questo valore è la soluzione dell'equazione che si ottiene ignorando il termine non lineare nell'equazione (33), cioè è la soluzione dell'equazione  $3v_2 - 1 = 0$ . I risultati dell'iterazione, che converge rapidamente verso la soluzione, sono riportati in Tabella 2.2.



**Fig. 2.6** Il metodo di Newton-Raphson non converge se  $V^*$  è il valore iniziale di tentativo.

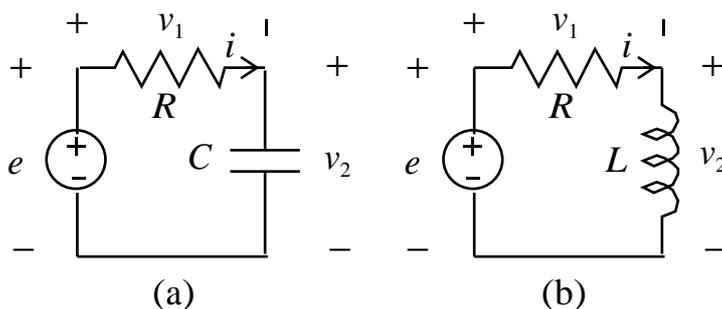
La convergenza del metodo di Newton-Raphson è sempre assicurata quando la funzione  $F(v_2)$  è strettamente crescente. Nel caso illustrato in Figura 2.6, caso che si verifica quando la curva caratteristica del resistore non lineare è non monotona, la convergenza dipende dal valore che si sceglie per il tentativo iniziale. Se si scegliesse  $V^*$  come valore iniziale si avrebbe una sequenza oscillante, e quindi la procedura non convergerebbe verso la soluzione  $V_2$ . Si osservi che anche in questo caso l'equazione ha una sola soluzione.

## 2.4 Circuito dinamico del primo ordine lineare

Abbiamo già detto che i circuiti che contengono resistori, generatori e bipoli dinamici, come induttori e condensatori, prendono il nome di *circuiti dinamici*. I circuiti dinamici costituiti da un solo elemento dinamico - un induttore o un condensatore - prendono il nome di circuiti dinamici del primo ordine. Ricordiamo che l'ordine sta a indicare il numero di elementi dinamici presenti nel circuito.

In questo paragrafo vengono studiati i due circuiti del primo ordine illustrati in Figura 2.7; l'induttore, il condensatore e il resistore sono lineari. Questi sono i circuiti del primo ordine più semplici.

Le equazioni che descrivono i due circuiti hanno la forma di un'equazione differenziale di primo ordine lineare. Come vedremo nel Capitolo 3 e approfonditamente nel Capitolo 5 un generico circuito del primo ordine lineare può essere sempre ricondotto allo studio di un circuito del tipo illustrato in Figura 2.7.



**Fig. 2.7** (a) Un circuito dinamico del primo ordine con condensatore; (b) un circuito dinamico del primo ordine con induttore.

In entrambi i circuiti i bipoli sono in serie, e quindi, le intensità di corrente che li attraversano sono uguali, così come abbiamo già visto nei due circuiti resistivi esaminati precedentemente. Per questa ragione negli schemi riportati in Figura 2.7 è indicata solo l'intensità della corrente  $i$ , con il corrispondente verso di riferimento. In conseguenza di ciò, anche questa volta non dobbiamo considerare le equazioni di Kirchhoff per le correnti.

Consideriamo il circuito di Figura 2.7a. Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni all'unica maglia del circuito otteniamo (la maglia è orientata in verso orario)

$$v_1 + v_2 - e(t) = 0. \quad (34)$$

Ora dobbiamo utilizzare le equazioni caratteristiche del resistore e del condensatore. Dalla relazione caratteristica del resistore lineare abbiamo l'equazione

$$v_1 - R_1 i = 0, \quad (35)$$

mentre dall'equazione caratteristica del condensatore lineare tempo invariante abbiamo l'equazione

$$i - C \frac{dv_2}{dt} = 0. \quad (36)$$

All'equazione differenziale (36) bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento del condensatore, e quindi del circuito, il valore della tensione del condensatore, che è la grandezza di stato del circuito, all'istante iniziale,

$$v_2(t=0) = V_0. \quad (37)$$

Le equazioni (34)-(36), insieme alla condizione iniziale (37), descrivono completamente la dinamica del circuito in esame; le grandezze incognite sono tre,  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$ . Queste equazioni sono tutte lineari, ma una di esse è un'equazione differenziale. Questa è la difficoltà introdotta dalla presenza di un elemento dinamico, come il condensatore.

Il sistema di equazioni (34)-(36) può essere ridotto ad una sola equazione differenziale in cui l'incognita è la grandezza di stato  $v_2$ . Questa è la procedura di riduzione più semplice, perché la grandezza di stato è la grandezza che appare sotto l'operazione di derivata nell'unica equazione differenziale del sistema di equazioni del circuito.

Sostituendo nell'equazione (35) l'espressione di  $i$  data dall'equazione (36), e l'espressione di  $v_1$ , così ottenuta, nell'equazione (34), si ha l'equazione per la tensione del condensatore

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = e(t). \quad (38)$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti: “*differenziale*” significa che la funzione incognita  $v_2$  compare anche sotto l'operatore di derivata; “*di ordine uno*” significa che compare un termine proporzionale alla derivata prima di  $v_2$  e che non compaiono termini proporzionali alle derivate di ordine superiore; “*lineare*” perché l'espressione a primo membro dipende linearmente dalla funzione incognita  $v_2(t)$ ; “*a coefficienti costanti*” perché i coefficienti che moltiplicano la derivata prima della funzione  $v_2$  e la funzione  $v_2$  non derivata (rispettivamente,  $RC$  e  $1$ ) sono indipendenti dal tempo. Il termine indipendente da  $v_2(t)$ , a secondo membro dell'equazione (38), è il termine noto. In questo caso coincide con la tensione impressa dal generatore  $e$ , in generale, può variare nel tempo.

L'equazione (38) ha infinite soluzioni. Per determinare quella che effettivamente si ha nel circuito in esame bisogna imporre che la soluzione verifichi anche la condizione iniziale (37).

Il prodotto  $RC$  ha le dimensioni di un tempo e, quindi, i tre termini dell'equazione (38) sono tutti omogenei dimensionalmente con una tensione <sup>7</sup>.

### Osservazione

Anche per le altre grandezze del circuito è possibile determinare le equazioni che esse devono verificare. L'equazione per la tensione  $v_1$  è

$$RC \frac{dv_1}{dt} + v_1 = RC \frac{de}{dt}. \quad (39)$$

Questa equazione può essere ottenuta a partire dall'equazione (38) utilizzando la relazione (34).

Utilizzando la relazione (35), dall'equazione (39) si ottiene immediatamente l'equazione per l'intensità della corrente  $i$ ,

$$RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{de}{dt}. \quad (40)$$

Le equazioni (38), (39) e (40) differiscono solo per il termine noto (e per l'incognita): i termini a sinistra di queste equazioni hanno tutti la stessa forma e

---

<sup>7</sup> La derivata di una funzione omogenea dimensionalmente con una tensione è una grandezza omogenea dimensionalmente con  $V \cdot s^{-1}$ .

sono moltiplicati per gli stessi coefficienti. Questo fatto non è casuale, ma è una proprietà generale dei circuiti lineari. Essa è una diretta conseguenza del fatto che, pur essendo le grandezze incognite diverse, esse sono grandezze elettriche di bipoli che interagiscono perché appartengono allo stesso circuito.

Anche le equazioni (39) e (40) devono essere risolte con opportune condizioni iniziali. Come facciamo a determinarle ?

E' molto semplice. L'equazione (34) vale per ogni istante di tempo e, quindi, anche all'istante  $t = 0$  nel caso in cui tutte le funzioni siano continue in  $t = 0$ .<sup>8</sup> Di conseguenza si ha

$$v_1(0) = e(0) - v_2(0). \quad (41)$$

Utilizzando la condizione iniziale (38) si ottiene

$$v_1(0) = e(0) - V_0. \quad (42)$$

Questo è il valore della tensione del resistore all'istante iniziale.

Per determinare il valore iniziale dell'intensità della corrente elettrica,  $i(0)$ , utilizziamo l'equazione (35), anche essa vale per ogni istante di tempo e, quindi, anche all'istante  $t = 0$ . Si ha

$$i(0) = \frac{v_1(0)}{R}. \quad (43)$$

Utilizzando la (42), si ottiene per  $i(0)$

$$i(0) = \frac{e(0) - V_0}{R}. \quad (44)$$

Non possiamo utilizzare l'equazione (36) perché non conosciamo il valore della derivata prima della tensione del condensatore all'istante iniziale !!! L'equazione (36) consente di valutare proprio  $dv_2/dt$  all'istante iniziale una volta noto il valore iniziale dell'intensità di corrente. Abbiamo trovato un risultato molto interessante: i valori di tutte le grandezze del circuito all'istante  $t = 0$  dipendono solo dal valore della tensione del generatore (che è nota) e

---

<sup>8</sup> Se qualche funzione è discontinua in  $t = 0$  occorrerà di volta in volta precisare se ci riferiamo all'istante  $0 + \varepsilon$  ovvero  $0 - \varepsilon$  con  $\varepsilon$  positivo e infinitesimo (con notazione sintetica  $0^+$ ,  $0^-$ ).

dalla condizione iniziale della tensione del condensatore (della grandezza di stato, che è nota). Le relazioni che esprimono le grandezze elettriche del circuito all'istante  $t=0$  in funzione del valore iniziale della tensione del generatore e del valore iniziale della grandezza di stato del circuito sono tutte di tipo algebrico. Questa è una proprietà generale e vale per ogni istante di tempo. Comunque una volta determinata la soluzione dell'equazione (38) che verifica la condizione iniziale (37) non c'è bisogno di risolvere le equazioni (39) e (40) con le condizioni iniziali (42) e (44), rispettivamente, per determinare la tensione  $v_1$  e l'intensità della corrente  $i$ . Una volta nota la tensione  $v_2$ , attraverso le relazioni (34) e (35) si determinano direttamente la tensione  $v_1$  e l'intensità della corrente  $i$ .

◆

### Esercizio

Si verifichi che l'intensità della corrente elettrica  $i$ , che attraversa l'induttore nel circuito di Figura 2.7b, è soluzione dell'equazione

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t). \quad (45)$$

Questa equazione deve essere risolta con la condizione iniziale

$$i(t=0) = I_0. \quad (46)$$

L'intensità della corrente  $i$  è la grandezza di stato del circuito. Per le altre grandezze del circuito valgono considerazioni simili a quelle appena svolte per l'altro circuito. Lasciamo al lettore lo sviluppo di queste considerazioni.

◆

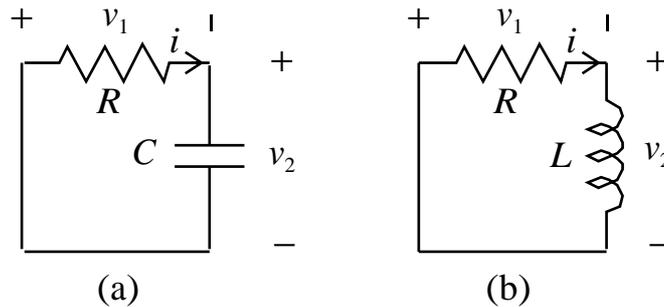
#### 2.4.1 Evoluzione libera e scarica del condensatore (dell'induttore)

Ora analizzeremo in dettaglio due tipi di evoluzioni, estremamente importanti sia dal punto di vista concettuale che da quello applicativo.

Cominciamo ad analizzare una situazione estremamente interessante, cioè quella in cui (il generatore di tensione è spento)

$$e(t) = 0. \quad (47)$$

A differenza di quanto accade nei circuiti resistivi, nei circuiti dinamici, come, ad esempio, quelli di Figura 2.7, le tensioni e le intensità delle correnti sono diverse da zero anche quando i generatori sono spenti, o sono assenti, se le condizioni iniziali sono diverse da zero.



**Fig. 2.8** (a) Circuito RC in evoluzione libera; (b) circuito RL in evoluzione libera.

Un circuito dinamico si dice che è in *evoluzione libera* se è privo di generatori, o se i generatori che contiene sono tutti spenti, Figura 2.8. Nei circuiti in evoluzione libera l'energia immagazzinata all'istante iniziale nei bipoli conservativi (condensatore, induttore) produce le correnti del circuito. L'energia elettrica dissipata dai resistori è, in questi casi, proprio quella immagazzinata inizialmente nei bipoli conservativi.

L'evoluzione libera del circuito di Figura 2.7a (cioè l'evoluzione del circuito RC di Figura 2.8a) è descritta dall'equazione differenziale omogenea

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0; \quad (48)$$

“*omogenea*” significa che il termine noto è uguale a zero. Essa deve essere risolta con la condizione iniziale (37). Riscriviamo l'equazione (48) nella forma:

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2}{RC}. \quad (49)$$

Le soluzioni dell'equazione (49) sono tutte quelle funzioni le cui derivate sono, a meno del fattore costante  $-1/RC$ , che ha le dimensioni di  $s^{-1}$ , uguali alla funzione stessa. Quali sono queste funzioni?

Dal corso di Analisi Matematica sappiamo che la funzione esponenziale

$$g(x) = e^x \quad (50)$$

ha una proprietà di questo tipo. Infatti, si ha

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (51)$$

È evidente che  $e^t$  non è la soluzione dell'equazione (49), perché la derivata di  $e^t$  è proprio uguale a se stessa. Questo non è un problema, basta modificarla semplicemente. Si consideri la funzione  $f(t)$  così definita:

$$f(t) = e^{\lambda t}, \quad (52)$$

dove  $\lambda$  è un parametro per il momento arbitrario, dimensionalmente omogeneo con l'inverso di un tempo<sup>9</sup>. Per questa funzione si ha che

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}. \quad (53)$$

Allora, se si sceglie

$$\lambda = -\frac{1}{RC}, \quad (54)$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = -\frac{1}{RC} e^{\lambda t}, \text{ ovvero, } \frac{df}{dt} = -\frac{1}{RC} f. \quad (55)$$

Allora, se è verificata la condizione (54) la funzione (52) è soluzione dell'equazione (49). A questo punto osserviamo che, se la funzione  $f(t)$  è una

---

<sup>9</sup> L'argomento di una qualsiasi funzione del tempo, ad eccezione di quelle di tipo lineare o lineare affine, deve essere necessariamente un numero puro, quindi la grandezza fisica che esso rappresenta deve essere adimensionale.

soluzione dell'equazione (49), anche la funzione  $Af(t)$ , dove  $A$  è una costante arbitraria, è soluzione della stessa equazione. Questa proprietà è solo conseguenza del fatto che l'equazione (48) è lineare e omogenea.  
In conclusione, l'espressione dell'integrale generale dell'equazione (48) è

$$v_2(t) = A \exp(-t/\tau), \quad (56)$$

dove

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = RC. \quad (57)$$

Alle soluzioni (56) si dà il nome di *modi di evoluzione naturale* del circuito. L'aggettivo naturale sta a indicare il fatto che queste sono soluzioni proprie del circuito indipendenti da forzamenti. Al parametro  $\lambda$ , dimensionalmente omogeneo con l'inverso di un tempo, si dà il nome di "*frequenza naturale*" del circuito. Siccome sia  $R$  che  $C$  sono positivi, la frequenza naturale del circuito  $RC$  è negativa. Il parametro  $\tau$  è dimensionalmente omogeneo con un tempo e prende il nome di *costante di tempo* del circuito; la costante arbitraria  $A$  prende il nome di *costante di integrazione*.

L'espressione (56) al variare del valore della costante  $A$  nell'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  descrive la famiglia di funzioni che verificano l'equazione (48). Questa famiglia rappresenta la soluzione generale dell'equazione (48). Tra tutte le possibili soluzioni descritte dalla (57) quella compatibile con la condizione iniziale (37) è la soluzione del circuito. Per determinarla basta imporre che la funzione (57) all'istante  $t = 0$  verifichi la condizione iniziale (37). Imponendo la condizione (37) si ottiene per la costante  $A$

$$A = V_0. \quad (58)$$

Infine, sostituendo la (58) nella (57) si ottiene la soluzione effettiva del circuito in esame

$$v_2(t) = V_0 \exp(-t/\tau). \quad (59)$$

L'andamento dell'intensità della corrente elettrica è

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \exp(-t/\tau). \quad (60)$$

Si assuma che gli elementi del circuito siano passivi:  $C > 0$  ( $L > 0$ ) e  $R > 0$ . Sotto questa ipotesi la costante di tempo  $\tau$  è positiva. Di conseguenza sia la tensione del condensatore che l'intensità della corrente elettrica tendono esponenzialmente a zero, qualunque sia il valore di  $V_0$ .

In queste condizioni l'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore viene interamente "dissipata" sotto forma di calore nel resistore durante il processo di scarica,

$$\frac{1}{2} CV_0^2 = \int_0^\infty \frac{v_2^2(t)}{R} dt. \quad (61)$$

Il condensatore, dunque, si scarica a causa della dissipazione introdotta dal resistore. Questo è l'esempio più semplice di *circuito dissipativo*.

Si consideri il grafico della tensione del condensatore. In Figura 2.9 viene riportato il grafico dell'andamento temporale della tensione del condensatore per il caso in cui  $V_0 = 1V$ ,  $R = 1\Omega$  e  $C = 1mF$ ; la costante di tempo è  $\tau = 1ms$ .

Valgono le seguenti proprietà:

- La retta passante per i due punti  $(0, V_0)$  e  $(\tau, 0)$  del piano  $(t, v_2)$  è tangente alla curva della tensione  $v_2(t)$  nel punto  $(0, V_0)$ .
- Dopo un intervallo di tempo pari a una costante di tempo  $\tau$  il valore della tensione è, approssimativamente, il 63% del valore iniziale  $V_0$ ,

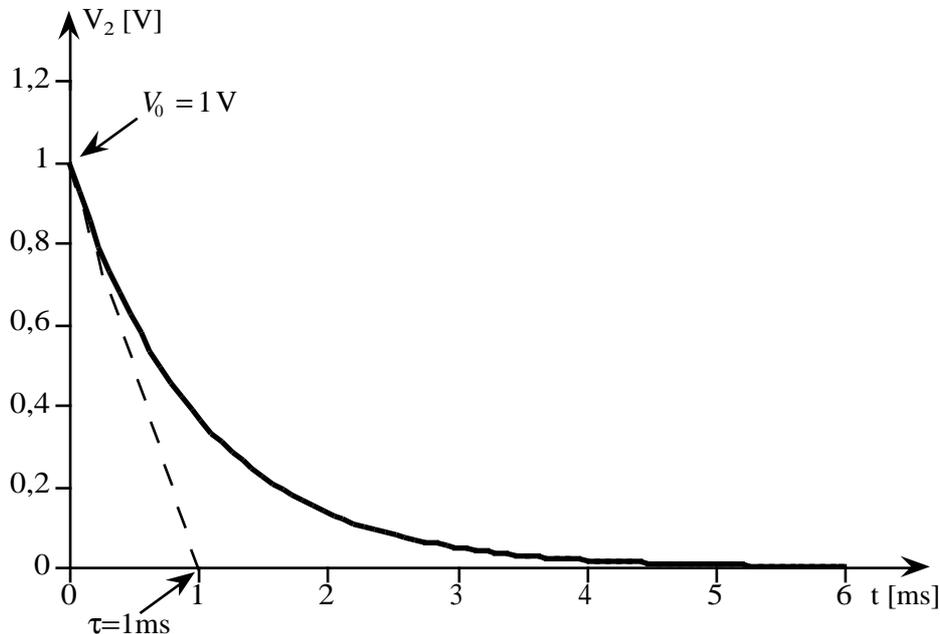
$$|v_2(\tau)| \cong \frac{63}{100} |V_0|. \quad (62)$$

- Dopo un intervallo pari a cinque costanti di tempo, il valore della tensione è, approssimativamente, il 7‰ del valore iniziale  $V_0$ ,

$$|v_2(5\tau)| \cong \frac{7}{1000} |V_0|. \quad (63)$$

- Dopo un intervallo pari a dieci costanti di tempo, il valore della tensione è, approssimativamente, 45/1000000 volte il valore iniziale  $V_0$ ,

$$|v_2(10\tau)| \cong \frac{45}{1000000} |V_0|. \quad (64)$$



**Fig. 2.9** Tensione del condensatore durante la scarica di un circuito RC.

È evidente, allora, il significato fisico della costante di tempo  $\tau$ . Essa dà una misura dell'intervallo di tempo necessario affinché il condensatore si scarichi. In principio è richiesto un tempo infinito per la scarica completa del condensatore. In realtà, dopo un intervallo di tempo pari a un numero finito ma elevato di costanti di tempo (ad esempio, cinque o dieci) il condensatore si può ritenere “praticamente” scarico. Anche se la tensione è diversa da zero, ad esempio, dopo cinque costanti di tempo, nell'applicazione di interesse può essere ritenuta praticamente uguale a zero, perché, ad esempio, è molto più piccola della tensione associata al rumore termico o del valore minimo di tensione che lo strumento di misura è in grado di rilevare.

### Esercizio

Si verifichi che l'intensità della corrente elettrica  $i$  che attraversa l'induttore del circuito di Figura 2.7b in evoluzione libera (del circuito  $RL$  di Figura 2.8b) è

$$i(t) = I_0 \exp(-t/\tau), \quad (65)$$

dove

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (66)$$

è la costante di tempo del circuito  $RL$ . In un circuito  $RL$  in evoluzione libera l'induttore si scarica con la costante di tempo data dall'espressione (66).

Il lettore verifichi, anche, che l'energia inizialmente immagazzinata nell'induttore viene trasformata interamente in calore nel resistore durante il processo di scarica,

$$\frac{1}{2}LI_0^2 = \int_0^\infty Ri^2(t)dt. \quad (67)$$

◆

Se il resistore fosse attivo ( $R < 0$ ) si avrebbe  $\tau < 0$  e  $v(t)$  divergerebbe esponenzialmente per  $t \rightarrow \infty$ .

#### 2.4.2 Evoluzione generica ed evoluzione forzata

Si consideri, ora, la situazione più generale in cui la tensione del generatore del circuito di Figura 2.7a è diversa da zero. Bisogna, ora, determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale (38), che è non omogenea.

La soluzione generale di un'equazione differenziale è l'espressione che rappresenta tutte le possibili soluzioni dell'equazione. Siccome l'equazione (38) è lineare, la sua soluzione generale  $v_2(t)$  può essere sempre rappresentata attraverso la somma,

$$v_2(t) = v_0(t) + v_p(t), \quad (68)$$

di una qualsiasi soluzione  $v_p(t)$  dell'equazione (38), che denomineremo soluzione particolare dell'equazione (38), e della soluzione generale  $v_0(t)$  dell'equazione omogenea associata,

$$RC \frac{dv_0}{dt} + v_0 = 0. \quad (69)$$

È immediato verificare che l'espressione (68) è soluzione dell'equazione (38), basta sostituirla in essa.

La soluzione particolare  $v_p(t)$  dell'equazione (38) dipende dal termine noto dell'equazione e, quindi, non può essere determinata se non si specifica la funzione  $e(t)$ .

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata (69) la conosciamo: l'abbiamo determinata quando abbiamo studiato l'evoluzione libera del circuito  $RC$ . Essa è

$$v_0(t) = A \exp(-t/\tau), \quad (70)$$

dove  $\tau$  è la costante di tempo del circuito  $RC$ , la cui espressione è data dalla (57), e  $A$  è una costante arbitraria (la costante di integrazione). Pertanto, l'espressione dell'integrale generale dell'equazione (37) è

$$v_2(t) = A \exp(-t/\tau) + v_p(t). \quad (71)$$

Al variare della costante di integrazione  $A$  si hanno tutte le possibili soluzioni del circuito in esame. Tra tutte le possibili soluzioni descritte dalla (71) quella che effettivamente si ha nel circuito in esame è quella compatibile con la condizione iniziale (37). Per determinarla basta imporre che la funzione data dall'espressione (71) all'istante  $t=0$  verifichi la condizione iniziale (37). Imponendo la condizione (37) si ottiene per la costante  $A$

$$A = V_0 - v_p(t=0). \quad (72)$$

Infine, sostituendo la (72) nella (71) si ottiene la soluzione effettiva del circuito in esame

$$v(t) = [V_0 - v_p(t=0)] \exp(-t/\tau) + v_p(t). \quad (73)$$

In presenza di generatori l'espressione della soluzione è costituita da due termini.

Si assuma, ora, che il resistore e il condensatore siano passivi; ricordiamo che ciò implica che  $\tau > 0$ . Il primo termine nella (73) tende esponenzialmente a

zero, qualunque sia il valore iniziale della tensione, con la costante di tempo  $\tau$ . Pertanto, per  $t \rightarrow \infty$  la tensione del condensatore tende asintoticamente all'andamento descritto dalla soluzione particolare indipendentemente dal valore iniziale dello stato del circuito. Ancora una volta, la dissipazione introdotta dal resistore “cancella” gli effetti dell'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore.

Si dice che un circuito è in *evoluzione forzata* se le grandezze di stato del circuito all'istante iniziale sono tutte nulle (la tensione del condensatore e l'intensità di corrente dell'induttore) e, quindi, l'energia inizialmente immagazzinata in essi è uguale a zero. In evoluzione forzata le correnti e le tensioni del circuito vengono prodotte solo attraverso l'azione dei generatori. Allora, per definizione, la soluzione del circuito di Figura 2.7a in evoluzione forzata è

$$v_f(t) = -v_p(t=0)\exp(-t/\tau) + v_p(t). \quad (74)$$

In questo caso la costante di integrazione dipende solo dal valore della soluzione particolare all'istante  $t=0$ . E' evidente, allora, che una generica soluzione può essere sempre espressa come somma della soluzione di evoluzione libera e della soluzione di evoluzione forzata. Infatti, dalla (73) si ha immediatamente che  $v(t) = v_l(t) + v_f(t)$ .

### Esercizio

Si verifichi che l'espressione dell'intensità della corrente elettrica  $i$  che attraversa l'induttore del circuito di Figura 2.7b è, in generale,

$$i(t) = [I_0 - i_p(t=0)]\exp(-t/\tau) + i_p(t), \quad (75)$$

dove la costante di tempo  $\tau$  data dalla relazione (66),  $i_p(t)$  è una soluzione particolare dell'equazione (45) e  $I_0$  è il valore iniziale dell'intensità della corrente elettrica che attraversa l'induttore. La soluzione in evoluzione forzata è

$$i_f(t) = -i_p(t=0)\exp(-t/\tau) + i_p(t). \quad (76)$$

◆

Resta ancora da determinare una soluzione particolare dell'equazione (38). Come abbiamo già fatto notare, per determinare una soluzione particolare c'è bisogno di specificare la tensione impressa dal generatore di tensione.

Diciamo subito che, in generale, non è possibile determinare analiticamente una soluzione particolare per qualsiasi andamento temporale della tensione  $e(t)$  del generatore. Qui di seguito studieremo due casi, come poi vedremo sono molto importanti nelle applicazioni, in cui è possibile determinare analiticamente una soluzione particolare: prima il caso in cui  $e(t)$  è una funzione costante e poi quello in cui è una funzione sinusoidale.

### 2.4.3 Generatore stazionario e carica del condensatore (dell'induttore)

Si consideri, prima, il caso in cui la tensione del generatore di tensione sia costante,

$$e(t) = E_0. \quad (77)$$

Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = E_0. \quad (78)$$

Essendo il termine noto e i coefficienti dell'equazione (78) costanti nel tempo è presumibile che essa abbia una soluzione costante nel tempo,

$$v_p(t) = V. \quad (79)$$

Sostituendo la (79) nella (78) e ricordando che la derivata di una costante è uguale a zero, si ottiene

$$v_p(t) = E_0. \quad (80)$$

Questa è la *soluzione stazionaria* del circuito. In conclusione, la soluzione generale dell'equazione (78) è

$$v_2(t) = A \exp(-t/\tau) + E_0. \quad (81)$$

Imponendo la condizione iniziale (37) si ha la soluzione effettiva del circuito,

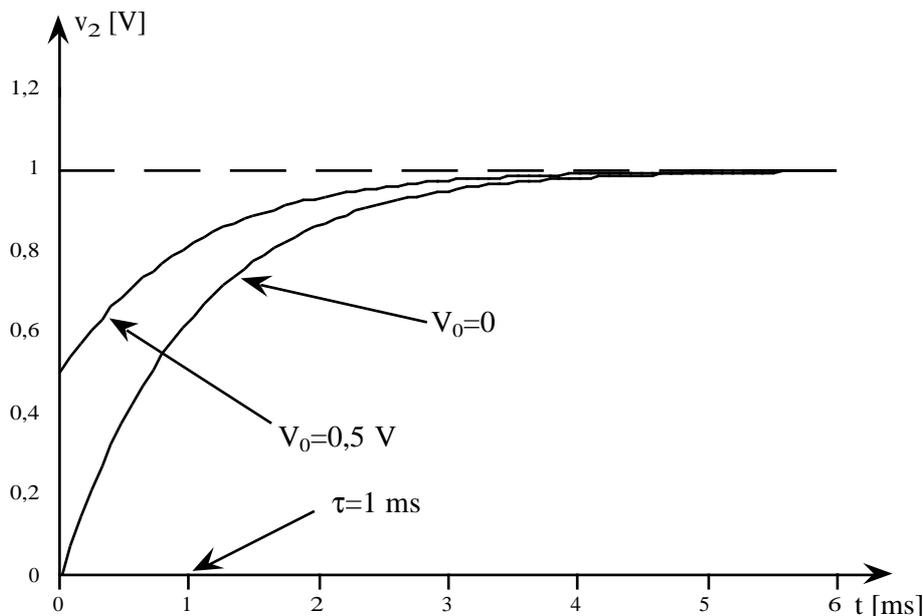
$$v_2(t) = (V_0 - E_0)e^{-t/\tau} + E_0. \quad (82)$$

Questa è la soluzione del circuito nel caso di generatore stazionario. Qualunque sia il valore della condizione iniziale abbiamo

$$v_2(t) \rightarrow E_0 \text{ per } t \rightarrow \infty. \quad (83)$$

Si assuma che il resistore e il condensatore siano passivi. Il primo termine dell'espressione (82) tende esponenzialmente a zero, qualunque sia il valore iniziale della tensione, con la costante di tempo  $\tau$ . Ad esso si dà il nome di *termine transitorio*. Dopo che il transitorio si è estinto, la soluzione del circuito è quella stazionaria. Per tale ragione alla soluzione stazionaria (80) si dà il nome di *soluzione di regime stazionario* del circuito. Si osservi che il termine transitorio dipende dalla condizione iniziale, mentre quello di regime è indipendente dalla condizione iniziale. Il tempo necessario affinché il transitorio si estingua può essere misurato in termini di costanti di tempo.

In Figura 2.10 sono riportati gli andamenti della tensione del condensatore per due valori diversi della condizione iniziale (e per lo stesso valore della tensione del generatore):  $E_0 = 1\text{V}$ ,  $R = 1\Omega$  e  $C = 1\text{ mF}$ ; la costante di tempo è  $\tau = 1\text{ ms}$  e il valore di regime della tensione è  $E_0 = 1\text{ V}$ .

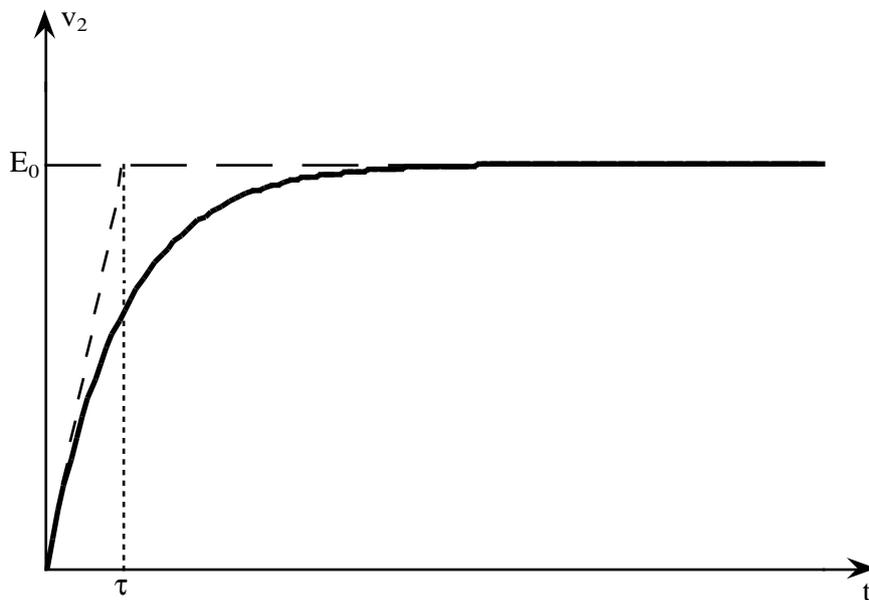


**Fig. 2.10** Andamenti della tensione del condensatore corrispondenti a due condizioni iniziali diverse.

L'evoluzione forzata del circuito di Figura 2.7a con generatore costante descrive il processo di carica di un condensatore. L'andamento nel tempo della tensione del condensatore durante la carica è descritta dalla funzione

$$v_2(t) = E_0(1 - e^{-t/\tau}); \quad (84)$$

il grafico è rappresentato in Figura 2.11.



**Fig. 2.11** Carica di un circuito RC.

La retta passante per i due punti  $(0,0)$  e  $(\tau, E_0)$  del piano  $(t, v_2)$  è tangente alla curva della tensione nel punto  $(0,0)$ . Dopo un intervallo di tempo pari, ad esempio, a cinque volte la costante di tempo, possiamo ritenere praticamente carico il condensatore. La differenza, in valore assoluto, tra il valore della tensione all'istante  $t=5\tau$  e il valore di regime stazionario è, approssimativamente, il 7% rispetto al valore di regime,

$$|v_2(5\tau) - E_0| \cong \frac{7}{1000} |E_0|. \quad (85)$$

L'intensità della corrente elettrica che attraversa il circuito è data da

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (86)$$

L'intensità della corrente elettrica tende a zero esponenzialmente per  $t \rightarrow \infty$ ; il massimo valore, che assume all'istante  $t = 0$ , vale

$$I_{max} = \frac{E_0}{R}. \quad (87)$$

Per assegnata capacità, il processo di carica è tanto più veloce quanto più piccola è il valore della resistenza. Di conseguenza i processi di carica veloci sono caratterizzati da elevate intensità di corrente nella parte iniziale del processo. Nelle applicazioni il tempo di carica di un condensatore è determinato, per fissato valore della capacità, proprio dal valore massimo dell'intensità di corrente elettrica che può attraversare il circuito senza sia danneggiato.

L'energia elettrica assorbita dal resistore durante il processo di carica è

$$w_R(0, \infty) = \int_0^\infty Ri^2(t)dt = \frac{E_0^2}{2R} \tau = \frac{CE_0^2}{2}. \quad (88)$$

Di conseguenza l'energia erogata dal generatore di tensione ideale durante l'intero processo di carica è

$$w_e(0, \infty) = w_R(0, \infty) + w_C(0, \infty) = \frac{CE_0^2}{2} + \frac{CE_0^2}{2} = CE_0^2. \quad (89)$$

Quindi metà dell'energia erogata dal generatore è dissipata sotto forma di calore e metà è immagazzinata nel condensatore. Questo è un risultato generale, indipendente dai valori effettivi dei parametri del circuito.

◆

### Esercizio

L'evoluzione forzata del circuito di Figura 2.7b con generatore stazionario descrive il processo di carica di un induttore. Si verifichi che l'andamento nel tempo dell'intensità della corrente elettrica che attraversa l'induttore è descritta dalla funzione

$$i(t) = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad (90)$$

dove la costante di tempo  $\tau$  è data dalla relazione (66). Valgono considerazioni simili a quelle appena svolte per la carica del condensatore. Lasciamo al lettore il loro sviluppo.



### 2.4.4 Generatore sinusoidale

Si consideri, ora, il caso in cui la tensione impressa dal generatore di tensione sia sinusoidale nel tempo con pulsazione  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$  dove  $f$  è la frequenza), ampiezza massima  $E$  e fase iniziale  $\varphi$ ,

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi). \quad (91)$$

In questo caso bisogna risolvere l'equazione

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2 = E \cos(\omega t + \varphi). \quad (92)$$

Essendo l'equazione (92) lineare, il termine noto sinusoidale e i suoi coefficienti costanti nel tempo, è presumibile che essa abbia una soluzione sinusoidale nel tempo con la stessa pulsazione del termine noto,

$$v_p(t) = V \cos(\omega t + \alpha). \quad (93)$$

L'ampiezza massima  $V$  e la fase iniziale  $\alpha$  sono incognite e devono essere determinate imponendo che la (93) verifichi l'equazione (92). Sostituendo la (93) nella (92) si ottiene l'equazione trigonometrica

$$-\omega RCV \sin(\omega t + \alpha) + V \cos(\omega t + \alpha) = E \cos(\omega t + \varphi). \quad (94)$$

La funzione (91) è soluzione dell'equazione (92) se esistono dei valori di  $V$  e  $\alpha$  per i quali l'equazione (94) è verificata per ogni  $t$ .

Questi valori esistono e possono essere determinati nel seguente modo. Siccome le incognite sono due,  $V$  e  $\alpha$ , basta imporre che la (94) sia verificata in due istanti di tempo diversi,  $t_1$  e  $t_2$ , che non differiscano per un multiplo intero del periodo  $T = 2\pi / \omega$ . Convien scegliere gli istanti  $t_1$  e  $t_2$  in modo tale che

$$\omega t_1 + \alpha = 0, \quad (95)$$

e

$$\omega t_2 + \alpha = \pi / 2. \quad (96)$$

Così facendo si ottiene il sistema di equazioni trigonometriche

$$V = E \cos(\varphi - \alpha), \quad (97)$$

$$\omega RCV = E \sin(\varphi - \alpha). \quad (98)$$

Dalle (97) e (98) si ha immediatamente

$$V = \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}, \quad (99)$$

$$\alpha = \varphi - \arctg(\omega\tau), \quad (100)$$

dove  $\tau$  è la costante di tempo data dall'espressione (57).

### Esercizio

Si dimostri che l'equazione (94) è verificata in ogni istante di tempo se  $V$  e  $\alpha$  sono dati dalle espressioni (99) e (100), rispettivamente.

◆

La funzione

$$v_p(t) = \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)] \quad (101)$$

è la *soluzione sinusoidale* del circuito. Allora, la soluzione generale dell'equazione (92) è

$$v_2(t) = A \exp(-t/\tau) + \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)]. \quad (102)$$

L'espressione (102) rappresenta, al variare della costante di integrazione  $A$  tutte le possibili soluzioni del circuito in esame quando la tensione impressa è sinusoidale. Imponendo la condizione iniziale (37), in questo caso si ottiene

$$A = V_0 - V \cos \alpha. \quad (103)$$

La soluzione effettiva del circuito è

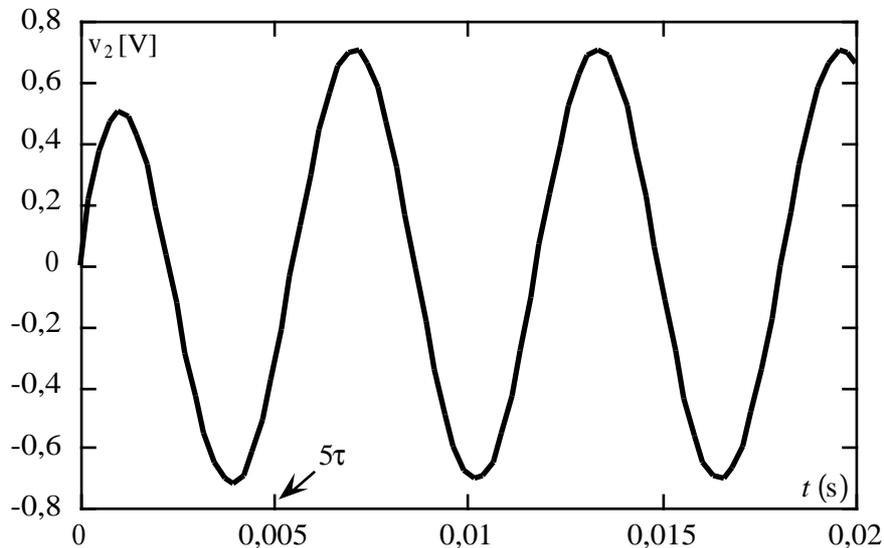
$$v_2(t) = (V_0 - V \cos \alpha) e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)]. \quad (104)$$

Questa è la soluzione del circuito nel caso di generatore sinusoidale. Qualunque sia la condizione iniziale si ha che

$$v_2(t) \rightarrow \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)] \quad \text{per } t \rightarrow \infty. \quad (105)$$

Il primo termine dell'espressione (104), che è il termine transitorio, tende esponenzialmente a zero, qualunque sia il valore iniziale della tensione, con la costante di tempo  $\tau$ . Dopo che il termine transitorio si è estinto, la soluzione del circuito è sinusoidale nel tempo con la stessa pulsazione del generatore. Per tale ragione alla soluzione particolare (101) si dà il nome di *soluzione di regime sinusoidale*. Anche in questo caso il termine transitorio dipende dalla condizione iniziale, mentre quello di regime non dipende dalla condizione iniziale.

Si osservi che anche in questo caso il termine transitorio dipende dalla condizione iniziale, mentre quello di regime non dipende dalla condizione iniziale.



**Fig. 2.12** Evoluzione forzata della tensione del condensatore nel caso per un generatore sinusoidale.

La soluzione del circuito in evoluzione forzata è

$$v_2(t) = -E \cos \alpha e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)]. \quad (106)$$

In Figura 2.12 viene riportato il grafico della tensione  $v_2(t)$  in evoluzione forzata (in funzione del tempo), per  $E = 1\text{V}$ ,  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $R = 1\Omega$  e  $L = 1 \text{ mF}$ ; la costante di tempo è  $\tau = 1\text{ms}$ , l'ampiezza massima e la fase iniziale della soluzione sinusoidale di regime sono  $V = 1/\sqrt{2} \text{ V} \cong 0,707 \text{ V}$  e  $\varphi = \pi/4$ . Il periodo del regime sinusoidale è  $T = 2\pi/\omega \cong 6.28 \text{ ms}$ .

### Esercizio

Si verifichi che l'espressione dell'intensità della corrente elettrica  $i$  che attraversa l'induttore del circuito di Figura 2.7b è

$$i(t) = (I_0 - I \cos \alpha) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)], \quad (107)$$

dove la costante di tempo  $\tau$  è data dalla relazione (66) e  $I_0$  è il valore iniziale dell'intensità della corrente elettrica che attraversa l'induttore. La soluzione in evoluzione forzata è

$$i(t) = -I \cos \alpha e^{-t/\tau} + \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \cos[\omega t + \varphi - \arctg(\omega\tau)]. \quad (108)$$

◆

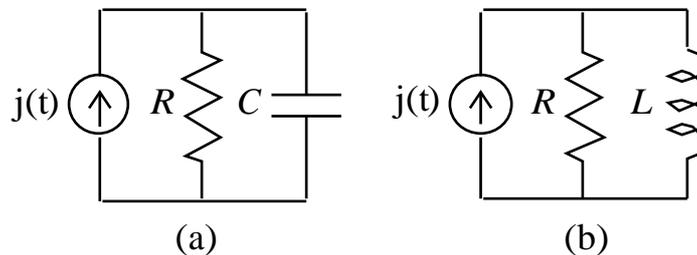
### Esercizio

Si determini la tensione del condensatore per il circuito di Figura 2.7a in evoluzione forzata quando la tensione impressa dal generatore è  $e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega t)$ ; si assuma:  $E_0 = E_1 = 1\text{V}$ ,  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $R = 1\Omega$  e  $C = 1 \text{ mF}$ .

◆

### Esercizio

In Figura 2.13 sono illustrati due circuiti del primo ordine alimentati da un generatore di corrente. In entrambi i circuiti i bipoli sono collegati in parallelo. Due bipoli sono connessi in parallelo, se i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi. Si determini: a) l'evoluzione forzata del circuito  $RC$  illustrato in Figura 2.13a per  $j(t) = J_0 = 1 \text{ A}$ ,  $R = 1\Omega$  e  $C = 0,5 \text{ mF}$ ; b) l'evoluzione forzata del circuito  $RL$  illustrato in Figura 2.13b per  $j(t) = J \sin \omega t$ ,  $J = 1 \text{ A}$ ,  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ,  $R = 1\Omega$  e  $L = 1 \text{ mH}$ . Infine, si determinino le potenze istantanee erogate dai due generatori di corrente.



**Fig. 2.13** Esempi di circuiti dinamici del primo ordine.

◆

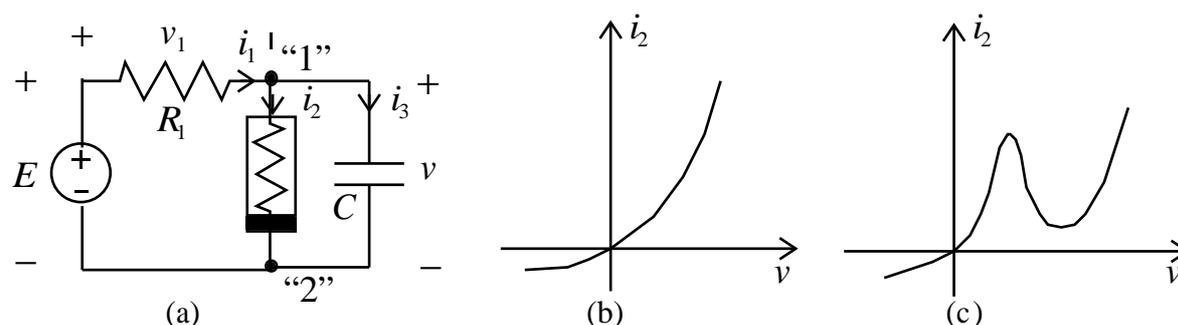
## 2.5 Circuito dinamico del primo ordine non lineare

Si consideri, ora, il circuito illustrato in Figura 2.14. Il generatore di tensione è stazionario, il condensatore è lineare e tempo invariante, un resistore è lineare e l'altro è non lineare. Analizzeremo le dinamiche di questo circuito facendo riferimento alle due curve caratteristiche che abbiamo già considerato, precedentemente, nello studio del circuito resistivo non lineare riportato in Figura 2.3.

Il circuito di Figura 2.14 può essere ottenuto da quello di Figura 2.3 collegando in *parallelo* al resistore non lineare un condensatore di capacità  $C$ . Due bipoli sono connessi in parallelo, se i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi. Il condensatore potrebbe essere anche il modello di effetti capacitivi parassiti esistenti all'interno del resistore non lineare (ad, esempio, la capacità di giunzione di un diodo).

Il resistore non lineare è collegato in parallelo al condensatore, e quindi, le loro tensioni sono uguali. Questo risultato è immediato e lo si ottiene applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni alla maglia costituita dal resistore non lineare e dal condensatore. Per questa ragione nel disegno riportato in Figura 2.14a è indicata solo la tensione  $v$ .

La tensione del condensatore  $v$  è la grandezza di stato del circuito. In questo circuito il resistore non lineare non è in serie con il resistore lineare a causa della presenza del condensatore in parallelo.



**Fig. 2.14** (a) Circuito dinamico non lineare; curve caratteristiche tipiche di resistori non lineari: (b) diodo a giunzione pn, (c) diodo tunnel.

Determiniamo, ora, le equazioni circuitali. Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo "1" abbiamo

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0. \quad (109)$$

Applicando, ora, la legge di Kirchhoff per la tensione alla maglia definita dal generatore di tensione, dal resistore lineare e dal resistore non lineare (o dal condensatore) abbiamo l'equazione

$$v + v_1 - E = 0. \quad (110)$$

Dalle relazioni caratteristiche del resistore lineare, del resistore non lineare e del condensatore abbiamo le equazioni

$$v_1 - R_1 i_1 = 0, \quad (111)$$

$$i_2 - g(v) = 0, \quad (112)$$

$$i_3 - C \frac{dv}{dt} = 0. \quad (113)$$

All'equazione differenziale (113) bisogna affiancare, per una descrizione completa del condensatore, e quindi del circuito, il valore della tensione del condensatore all'istante iniziale,

$$v(t=0) = V_0. \quad (114)$$

L'insieme delle equazioni (109)-(113) sono un sistema di 5 equazioni nelle altrettante incognite  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $v_1$  e  $v$ . È evidente che le difficoltà nella soluzione di questo problema sono superiori alle difficoltà che abbiamo incontrato sia nello studio del circuito resistivo non lineare, sia nello studio del circuito dinamico lineare, perché bisogna risolvere, come tra poco faremo vedere, un'equazione differenziale non lineare.

Anche in questo caso è opportuno ridurre l'intero sistema di equazioni ad una sola equazione differenziale in una sola incognita, e conviene scegliere come incognita la tensione del condensatore. Questa è anche la grandezza che appare sotto l'operazione di derivata nell'unica equazione differenziale (equazione (113)) del sistema di equazioni del circuito.

Sostituendo l'espressione di  $v_1$  data dall'equazione (110) nell'equazione (111) si ha

$$i_1 = \frac{E - v}{R_1}. \quad (115)$$

Ora, sostituendo nell'equazione (109) l'espressione di  $i_1$  data dalla (115), l'espressione di  $i_2$  data dalla (112) e l'espressione di  $i_3$  data dalla (113), si ottiene l'equazione cercata

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + g(v) = \frac{E}{R}. \quad (116)$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine, non lineare e con termine noto costante. Anche essa ha infinite soluzioni. Per determinarne una sola, quella che si realizza nel circuito, bisogna imporre che la soluzione verifichi anche la condizione iniziale (114). Una volta determinata la tensione del condensatore, utilizzando le equazioni algebriche (109)-(112) possiamo determinare tutte le altre grandezze del circuito.

Anche se in questo caso particolare l'equazione (116) potrebbe essere risolta analiticamente attraverso la tecnica della separazione delle variabili (lasciamo al lettore volenteroso la sua soluzione), nella maggior parte dei casi ciò non è possibile. E' necessario ricorrere, in generale, a metodi approssimati di tipo numerico per la soluzione di equazioni differenziali non lineari.

Questo corso introduttivo alla teoria dei circuiti tratta, sostanzialmente, di circuiti lineari. L'insegnamento di metodi di soluzione di equazioni differenziali non lineari attraverso metodi numerici esula dagli obiettivi del corso. Noi, qui, ci limiteremo solo a descrivere le proprietà qualitative più importanti delle soluzioni dell'equazione (116) utilizzando di nuovo un metodo "grafico". Riscriviamo l'equazione (116) nel modo seguente

$$C \frac{dv}{dt} = \left( \frac{E - v}{R} \right) - g(v). \quad (117)$$

Si riporti sul piano  $(v, y)$ , Figura 2.15, la curva caratteristica  $G$  del resistore non lineare definita dall'equazione

$$y_G = g(v). \quad (118)$$

Poi sullo stesso piano si riporti la retta  $R$  definita dall'equazione

$$y_R = \frac{E - v}{R}. \quad (119)$$

Allora, l'equazione differenziale (117) può essere scritta come

$$C \frac{dv}{dt} = y_R(v) - y_G(v). \quad (120)$$

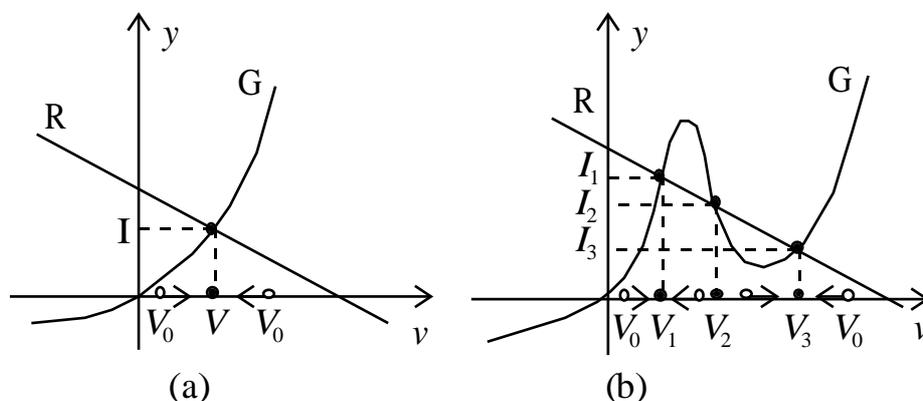
In corrispondenza dei punti di intersezione tra la retta R e la curva G si ha che

$$y_R(V) = y_G(V), \quad (121)$$

e quindi

$$C \frac{dv}{dt} \Big|_{v=V} = y_R(V) - y_G(V) = 0. \quad (122)$$

Dunque, i valori di tensione  $V$  corrispondenti ai punti di intersezione tra la retta R e la curva G sono le soluzioni stazionarie del circuito <sup>10</sup>.



**Fig. 2.15** *Discussione grafica del comportamento della soluzione del circuito di Figura 2.9 per i due casi in esame.*

In condizioni stazionarie il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto, perché essendo la tensione costante nel tempo l'intensità della corrente elettrica che lo attraversa è nulla. Di conseguenza in condizioni stazionarie le

<sup>10</sup> A partire dalla (116) si può dimostrare che, oltre a  $dv/dt|_{v=V} = 0$ , si ha anche  $d^2v/dt^2|_{v=V} = 0$ ,  $d^3v/dt^3|_{v=V} = 0$ , e così via. Ciò implica che  $v = V$  è una soluzione stazionaria del circuito.

soluzioni del circuito in esame coincidono con quelle del circuito resistivo non lineare analizzato nel paragrafo 2.3 e rappresentato in Figura 2.3.

In accordo a quanto già visto nel paragrafo 2.3, il circuito in esame ha una sola soluzione stazionaria se la curva caratteristica del resistore non lineare è monotona crescente, Figura 2.15a. Invece, se la curva caratteristica è non monotona le soluzioni stazionarie possono essere più di una, Figura 2.15b.

Se il valore iniziale della tensione del condensatore è uguale al valore stazionario,  $V_0 = V$ , il circuito si trova fin dall'istante iniziale in regime stazionario. Cosa accade se  $V_0 \neq V$  ?

Quando  $v \neq V$  si ha  $dv/dt \neq 0$  e la soluzione del circuito non è stazionaria, ma varia nel tempo. Il comportamento dinamico del circuito dipende dal segno del  $dv/dt$ .

Analizziamo, prima, il caso in cui la curva caratteristica del resistore non lineare è monotona crescente, Figura 2.15a. A sinistra della retta (verticale)  $v = V$  il punto appartenente alla retta R corrispondente a un dato valore di tensione  $v$  ( $v < V$ ) è sempre al di sopra del corrispondente punto appartenente alla curva G, mentre a destra della retta  $v = V$ , cioè per  $v > V$ , accade il contrario. Quando il punto di R corrispondente al valore di tensione  $v$  è al di sopra del corrispondente punto di G, si ha  $y_R(v) - y_G(v) > 0$  e quindi  $dv/dt > 0$  perché  $C > 0$ . Invece, quando il punto di R corrispondente al valore di tensione  $v$  è al di sotto del corrispondente punto di G, si ha  $y_R(v) - y_G(v) < 0$  e quindi  $dv/dt < 0$  ( $C > 0$ ). I risultati che abbiamo appena ottenuto sono riassunti dalla relazione

$$\frac{dv}{dt} \begin{cases} > 0 & v > V, \\ = 0 & v = V, \\ < 0 & v < V. \end{cases} \quad (123)$$

Da queste considerazioni si ha che, se il valore iniziale della tensione,  $V_0$ , è maggiore di  $V$ , la tensione  $v(t)$  decresce fino a quando non raggiunge il valore stazionario  $V$ , invece se  $V_0$  è minore di  $V$ ,  $v(t)$  cresce fino a quando non raggiunge il valore stazionario  $V$ , Figura 2.15a. Infine, se  $V_0 = V$  si ha  $v(t) = V$ . Comunque siano le condizioni iniziali, la soluzione tende asintoticamente alla soluzione  $v = V$ , che è l'unica soluzione stazionaria del circuito.

In questo caso si dice che la soluzione stazionaria  $v = V$  è *stabile*: comunque si scelga un intorno di  $v = V$  e per ogni condizione iniziale appartenente a tale

intorno, il circuito evolve in modo tale da raggiungere l'unico regime stazionario  $v = V$ . In questo caso si dice anche che il regime stazionario  $v = V$  è l'*attrattore* di tutte le soluzioni del circuito.

Si consideri, ora, il caso in cui la caratteristica  $G$  è non monotona (Figura 2.15b), e interseca la retta  $R$  in tre punti. I valori di tensione corrispondenti a questi tre punti,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ , sono le soluzioni stazionarie del circuito. (Se la retta  $R$  intersecasse la curva  $G$  in un solo punto la dinamica avrebbe le stesse caratteristiche che sono state descritte nel caso precedente.)

I punti di  $R$  corrispondenti a valori di  $v$  inferiori a  $V_1$  sono sempre al di sopra dei corrispondenti punti di  $G$ ; pertanto si ha  $y_R(v) - y_G(v) > 0$  per  $v < V_1$ .

I punti di  $R$  corrispondenti a valori di  $v$  compresi tra le due soluzioni stazionarie  $v = V_1$  e  $v = V_2$  sono sempre al di sotto dei corrispondenti punti di  $G$ , quindi  $y_R(v) - y_G(v) < 0$  per  $V_1 < v < V_2$ .

I punti di  $R$  corrispondenti a valori di  $v$  compresi tra le due soluzioni stazionarie  $v = V_2$  e  $v = V_3$  sono sempre al di sopra dei corrispondenti punti di  $G$ , quindi  $y_R(v) - y_G(v) > 0$  per  $V_2 < v < V_3$ .

Infine, i punti di  $R$  corrispondenti a valori di  $v$  superiori a  $V_3$  sono sempre al di sotto dei corrispondenti punti di  $G$ , quindi  $y_R(v) - y_G(v) < 0$  per  $V_3 < v$ .

Essendo  $C > 0$ , si ha allora

$$\frac{dv}{dt} \begin{cases} > 0 & v < V_1 \text{ o } V_2 < v < V_3, \\ = 0 & v = V_1 \text{ o } v = V_2 \text{ o } v = V_3, \\ < 0 & V_1 < v < V_2 \text{ o } v > V_3. \end{cases} \quad (124)$$

Condizione iniziale	Segno di $dv/dt$	Comportamento di $v(t)$ per $t \rightarrow \infty$
$V_0 < V_1$	$dv/dt > 0$	$v(t) \rightarrow V_1$
$V_0 = V_1$	$dv/dt = 0$	$v(t) = V_1$
$V_1 < V_0 < V_2$	$dv/dt < 0$	$v(t) \rightarrow V_1$
$V_0 = V_2$	$dv/dt = 0$	$v(t) = V_2$
$V_2 < V_0 < V_3$	$dv/dt > 0$	$v(t) \rightarrow V_3$
$V_0 = V_3$	$dv/dt = 0$	$v(t) = V_3$
$V_0 > V_3$	$dv/dt < 0$	$v(t) \rightarrow V_3$

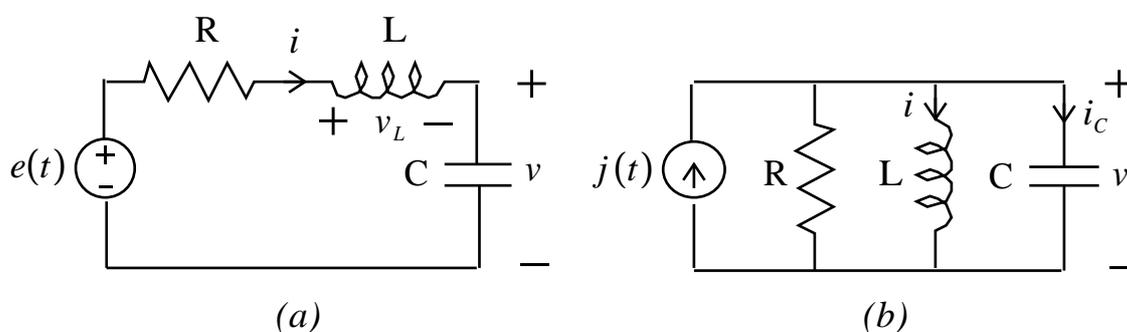
**Tab. 2.3** *Riassunto del comportamento asintotico della tensione del condensatore nel caso riportato in Figura 2.15b.*

In questo caso il regime stazionario che il circuito raggiunge dipende dalla condizione iniziale del condensatore. I possibili comportamenti asintotici della tensione del condensatore (cioè i comportamenti per  $t \rightarrow \infty$ ) sono riportati in Figura 2.15b e riassunti in Tabella 2.3. Le due soluzioni stazionarie  $v(t) = V_1$  e  $v(t) = V_3$  sono soluzioni stazionarie stabili, mentre la soluzione stazionaria  $v(t) = V_2$  è instabile: comunque si scelga il valore della condizione iniziale  $V_0$  prossimo al valore della soluzione stazionaria  $V_2$  il circuito evolve sempre in maniera tale da raggiungere la soluzione stazionaria  $v(t) = V_1$  o la soluzione stazionaria  $v(t) = V_3$ , cioè tende sempre ad allontanarsi dalla soluzione stazionaria  $v(t) = V_2$ . Le soluzioni stazionarie  $v(t) = V_1$  e  $v(t) = V_3$  sono gli attrattori delle soluzioni del circuito: quale di questi due viene raggiunto dipende solo dalla condizione iniziale. Attraverso circuiti di questo tipo è possibile realizzare circuiti bistabili e memorie binarie.

## 2.6 Circuito dinamico del secondo ordine lineare

Chiudiamo la panoramica analizzando un circuito del secondo ordine. In questo paragrafo vengono studiati i due circuiti illustrati in Figura 2.16; l'induttore, il condensatore e il resistore sono lineari e tempo invarianti. Questi sono i circuiti del secondo ordine più semplici: il circuito di Figura 2.16a prende il nome di *circuito RLC serie*, il circuito di Figura 2.16b prende il nome di *circuito RLC parallelo*.

Le equazioni che descrivono i due circuiti in esame sono equazioni differenziali del secondo ordine lineari. Come vedremo nel Capitolo 7 le equazioni che governano un generico circuito del secondo ordine lineare hanno una struttura identica a quelle che ora studieremo.



**Fig. 2.16** (a) Circuito RLC serie e (b) circuito RLC parallelo.

Consideriamo il circuito *RLC* serie, Figura 2.16a. Le equazioni caratteristiche dei bipoli a memoria sono

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i, \\ L \frac{di}{dt} &= v_L. \end{aligned} \quad (125)$$

Per determinare le equazioni di stato bisogna esprimere la corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato. Siccome il condensatore è in serie con l'induttore la corrente del condensatore è uguale alla corrente dell'induttore e, quindi, in questo caso coincide con una grandezza di stato. Per esprimere la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato bisogna applicare la seconda legge di Kirchhoff. Abbiamo

$$v_L = e - v - Ri. \quad (126)$$

Le equazioni di stato sono

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= i, \\ L \frac{di}{dt} &= -Ri - v + e(t). \end{aligned} \quad (127)$$

Il sistema di equazioni differenziali (127) deve essere risolto con le condizioni iniziali

$$v(t=0) = V_0, \quad i(t=0) = I_0. \quad (128)$$

Per risolvere questo problema esistono diversi metodi. Qui risolveremo il problema riducendo il sistema (127) ad una sola equazione in una sola incognita. Sostituendo la prima equazione di stato nella seconda, si ottiene l'equazione differenziale per la tensione del condensatore

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = \frac{e(t)}{LC}. \quad (129)$$

L'equazione scalare del secondo ordine (129) deve essere risolta assegnando il valore iniziale della tensione del condensatore e il valore della sua derivata prima all'istante iniziale  $t = 0$ . Il valore di  $dv/dt$  in ciascun istante può essere determinato utilizzando la prima delle equazioni di stato (127). Abbiamo, allora,

$$\begin{aligned} v(t=0) &= V_0, \\ \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{I_0}{C}. \end{aligned} \quad (130)$$

L'equazione differenziale (129) deve essere risolta con le condizioni iniziali (130). Questo è il problema di Cauchy che bisogna risolvere quando si studia un generico circuito del secondo ordine lineare e tempo invariante. Una volta determinata la soluzione, usando la prima equazione del sistema (127) è possibile determinare l'intensità di corrente dell'induttore attraverso una semplice operazione di derivata.

### Osservazione

L'equazione per l'intensità di corrente  $i(t)$  è

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}. \quad (131)$$

Questa equazione può essere ottenuta a partire dalle equazioni di stato (127). Essa deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i(t=0) &= I_0, \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t_0=0} &= \frac{1}{L} [-RI_0 - V_0 + e(t=0)]. \end{aligned} \quad (132)$$

Le equazioni (129) e (131) differiscono solo per il termine noto (e per l'incognita, ovviamente): i termini a sinistra di queste equazioni hanno tutti la stessa forma e sono moltiplicati per gli stessi coefficienti. Come abbiamo già commentato nel § 2.4 ciò non è casuale, ma è una proprietà generale dei circuiti lineari, sulla quale torneremo nel Capitolo 7.

◆

**Esercizio**

Si verifichi che le equazioni di stato per il circuito *RLC* parallelo di Figura 2.16b sono

$$\begin{aligned} C \frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{R} - i + j, \\ L \frac{di}{dt} &= v, \end{aligned} \quad (133)$$

e l'equazione differenziale per la tensione del condensatore è

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{j(t)}{LC}. \quad (134)$$

L'equazione (134) deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} i(t=0) &= I_0, \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t_0=0} &= \frac{V_0}{L}. \end{aligned} \quad (135)$$

◆

Come per il circuito del primo ordine lineare studiato nel § 2.4, anche per questo circuito si ha che una qualsiasi sua soluzione può essere sempre rappresentata come somma di due termini, la soluzione del circuito in evoluzione libera,  $v_l = v_l(t)$ , e la soluzione del circuito in evoluzione forzata,  $v_f = v_f(t)$ . Ricordiamo che con evoluzione libera si intende l'evoluzione del circuito quando gli eventuali generatori presenti sono tutti spenti; invece, con evoluzione forzata si intende l'evoluzione del circuito quando i valori iniziali delle grandezze di stato sono uguali a zero. Ora esamineremo in dettaglio l'evoluzione libera, poi considereremo altri tipi di evoluzioni.

### 2.6.1 Evoluzione libera

Per definizione di evoluzione libera bisogna porre

$$e(t) = 0 \quad (136)$$

nell'equazione (129). Il circuito *RLC* serie in evoluzione libera è governato dall'equazione differenziale omogenea

$$\frac{d^2 v_l}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_l}{dt} + \omega_r^2 v_l = 0. \quad (137)$$

Il parametro  $\alpha$  è definito come

$$\alpha \equiv \frac{R}{2L}, \quad (138)$$

mentre  $\omega_r$  è definito come

$$\omega_r \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (139)$$

Entrambi questi parametri sono omogenei dimensionalmente con  $s^{-1}$ . Come vedremo nel Capitolo 7  $\omega_r$  è proprio la *pulsazione di risonanza* del circuito *RLC*.

L'equazione (137) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e omogenea. La soluzione generale può essere determinata osservando che la funzione

$$Ke^{\lambda t} \quad (140)$$

ha una derivata prima e una derivata seconda che “somigliano” proprio a essa stessa.

L'espressione (140) è soluzione dell'equazione (137) se il parametro  $\lambda$  è soluzione dell'equazione algebrica di secondo grado

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_r^2 = 0. \quad (141)$$

Il polinomio di secondo grado

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_r^2. \quad (142)$$

è il cosiddetto *polinomio caratteristico* associato all'equazione differenziale (137). Esso è la somma di tre monomi in  $\lambda$ : al termine della (137) in cui compare la derivata seconda corrisponde il monomio in  $\lambda$  di grado due, con lo stesso coefficiente della derivata seconda, cioè 1; al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il monomio in  $\lambda$  di grado uno, con lo stesso coefficiente della derivata prima, cioè  $2\alpha$ ; infine; al termine non derivato corrisponde il monomio di grado zero, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione incognita, cioè  $\omega_r^2$ .

Le radici del polinomio caratteristico sono

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_+ \\ \lambda_- \end{array} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}. \quad (143)$$

Se  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  esistono, allora, due soluzioni distinte dell'equazione (137),

$$v^+(t) = K_+ e^{\lambda_+ t}, \quad (144)$$

$$v^-(t) = K_- e^{\lambda_- t}, \quad (145)$$

dove  $K_+$  e  $K_-$  sono due costanti arbitrarie. Siccome l'equazione (137) è lineare anche la loro somma è soluzione dell'equazione,

$$v_l(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}. \quad (146)$$

Questa è l'espressione della soluzione generale dell'equazione (137) quando le radici del polinomio caratteristico sono distinte, cioè  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ : al variare di  $K_+$  e  $K_-$  (in generale, nell'insieme dei numeri complessi), si ottengono tutte le possibili soluzioni della (137).

Quando le due frequenze naturali sono coincidenti,  $\lambda_+ = \lambda_- = -\alpha$ , l'espressione della soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$v_l(t) = Ae^{-\alpha t} + Bte^{-\alpha t}, \quad (147)$$

dove  $A$  e  $B$  sono due costanti arbitrarie.

Le due costanti di integrazione  $K_+$  e  $K_-$  ( $A$  e  $B$ ) devono essere determinate imponendo che la (146) (la (147))verifichi le condizioni iniziali (130), quindi  $K_+$  e  $K_-$  ( $A$  e  $B$ ) dipendono dallo stato iniziale del circuito. Le frequenze naturali  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  sono, invece, grandezze caratteristiche del circuito, che non dipendono dai generatori indipendenti e dallo stato iniziale.

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema di equazioni algebriche lineari (se  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ )

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= V_0, \\ \lambda_+ K_+ + \lambda_- K_- &= \frac{I_0}{C}, \end{aligned} \quad (148)$$

nelle incognite  $K_+$  e  $K_-$ . Le soluzioni sono

$$\begin{aligned} K_+ &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left( \frac{I_0}{C} - \lambda_- V_0 \right), \\ K_- &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left( \lambda_+ V_0 - \frac{I_0}{C} \right). \end{aligned} \quad (149)$$

Se  $\lambda_+ = \lambda_-$  bisogna imporre le condizioni iniziali all'espressione (147).

## 2.6.2 Modi di evoluzione naturali

Ora analizzeremo in dettaglio l'evoluzione libera del circuito  $RLC$  serie. Un generico circuito del secondo ordine ha due modi di evoluzione naturali,  $K_+ e^{\lambda_+ t}$  e  $K_- e^{\lambda_- t}$ , e due frequenze naturali,  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$ . Quando le frequenze naturali sono coincidenti i modi naturali di evoluzione sono  $Ae^{-\alpha t}$  e  $Bte^{-\alpha t}$ .

Abbiamo già visto (nei circuiti del primo ordine) che il comportamento qualitativo dell'evoluzione libera di un circuito dipende dalle sue frequenze naturali, e quindi è importante studiarne le proprietà.

L'evoluzione libera di un circuito  $RLC$  è più ricca di quella di un circuito  $RC$  (o  $RL$ ) perché le frequenze naturali sono le soluzioni di un'equazione di secondo grado. Le frequenze naturali sono reali e distinte se il discriminante del polinomio caratteristico è maggiore di zero, sono reali e coincidenti se il

discriminante del polinomio caratteristico è uguale a zero, mentre sono complesse coniugate se il discriminante è minore di zero.

L'espressione del discriminante del polinomio caratteristico è

$$\Delta = \alpha^2 - \omega_r^2. \quad (150)$$

La (150) può essere anche riscritta come

$$\Delta = \alpha^2 \left( 1 - \frac{\omega_r^2}{\alpha^2} \right) = \alpha^2 (1 - 4Q^2), \quad (151)$$

dove

$$Q \equiv \frac{L}{R} \omega_r, \quad (152)$$

è il cosiddetto *fattore di merito* del circuito *RLC* serie (vedi Capitolo 7).

Le frequenze naturali del circuito *RLC* serie sono reali se  $Q < 1/2$ ,

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \alpha_d, \quad (153)$$

dove

$$\alpha_d \equiv \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}. \quad (154)$$

Se i bipoli sono passivi  $R$ ,  $L$  e  $C$  sono grandezze positive,  $\alpha > \alpha_d$  e, quindi,

$$\lambda_- < \lambda_+ < 0. \quad (155)$$

Quando  $Q = 1/2$  le frequenze naturali sono reali e coincidenti ( $\alpha_d = 0$ ),

$$\lambda_{\pm} = -\alpha. \quad (156)$$

Se i bipoli sono passivi si ha

$$\lambda_{\pm} = -\alpha < 0. \quad (157)$$

Quando  $Q > 1/2$  le frequenze naturali sono complesse coniugate,

$$\lambda_{\pm} = -\alpha \pm i \omega_d, \quad (158)$$

dove

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}; \quad (159)$$

nella (158)  $i$  rappresenta l'unità immaginaria,  $i = \sqrt{-1}$ . Se i bipoli sono passivi si ha

$$\operatorname{Re}\{\lambda_{\pm}\} = -\alpha < 0. \quad (160)$$

Si osservi che il fattore di merito di un circuito  $RLC$  può essere espresso anche come

$$Q = \frac{R_c}{R}, \quad (161)$$

dove la “resistenza caratteristica”  $R_c$  è definita come

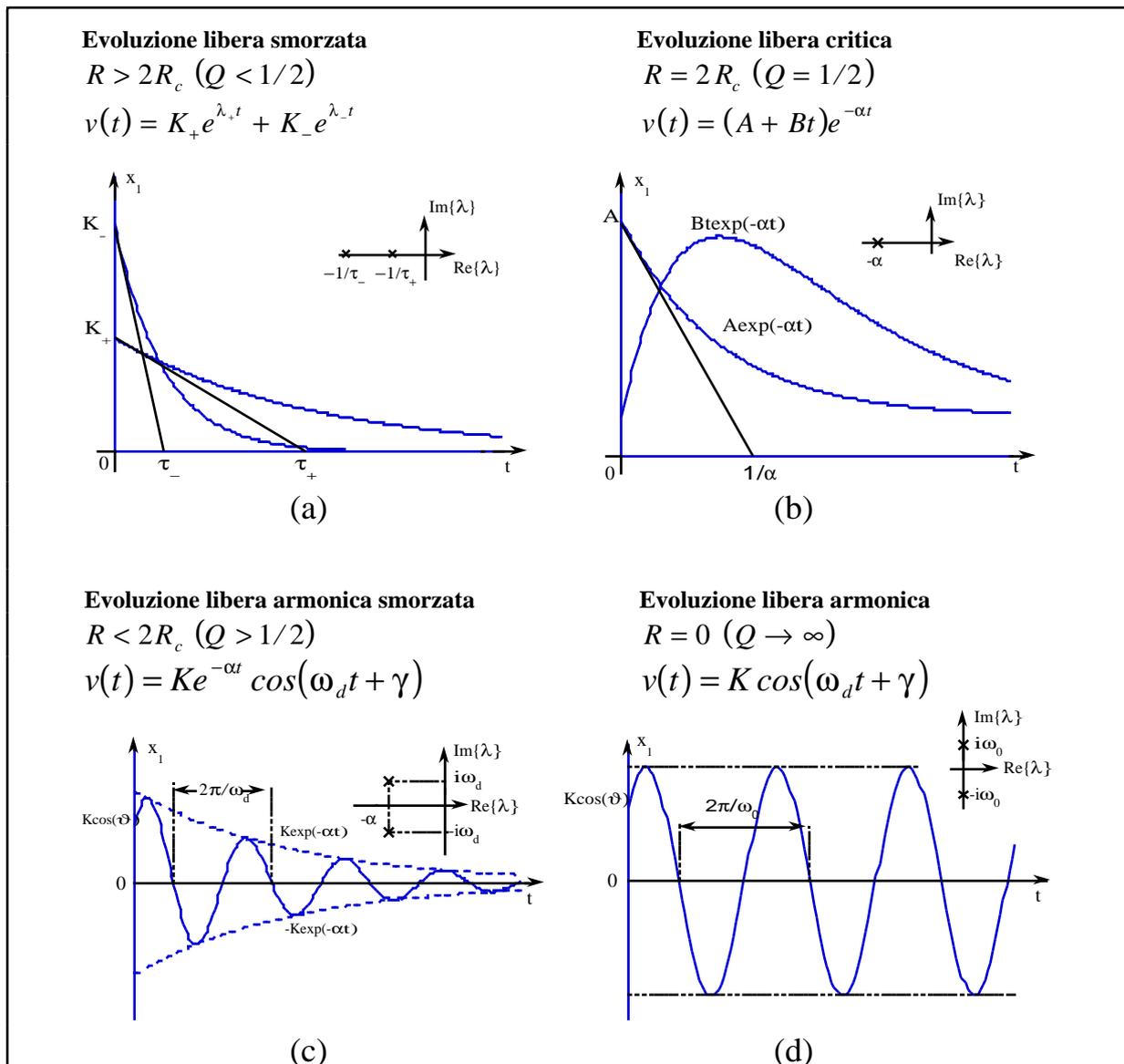
$$R_c \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (162)$$

Quindi abbiamo,

$$R \begin{cases} < 2R_c & \text{frequenze naturali complesse coniugate,} \\ = 2R_c & \text{frequenze naturali reali e coincidenti,} \\ > 2R_c & \text{frequenze naturali reali e distinte.} \end{cases} \quad (163)$$

In presenza di bipoli attivi le frequenze naturali potrebbero avere parte reale maggiore di zero.

Si assuma, ora, che i bipoli del circuito  $RCL$  siano tutti passivi. Sotto questa ipotesi la parte reale delle frequenze naturali non può essere maggiore di zero. Le parti reale di  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  sono uguali a zero se e solo se  $R = 0$ . Si assuma che  $R > 0$ .



**Fig. 2.17** Possibili risposte in evoluzione libera per un circuito RLC.

### - Modi naturali aperiodici smorzati

Quando  $R > 2R_c$  ( $Q < 1/2$ ) le frequenze naturali sono reali, e quindi le due costanti di integrazione  $K_+$  e  $K_-$  sono reali. Per la passività e per la presenza della dissipazione, entrambe le frequenze naturali sono negative. Pertanto, l'evoluzione libera è la somma di due funzioni esponenziali smorzate ed è, quindi, caratterizzata da una dinamica aperiodica, Figura 2.17a. Questo tipo di evoluzione prende il nome di *evoluzione aperiodica smorzata* e i corrispondenti modi sono aperiodici smorzati. Ciascun modo di evoluzione libera ha una

propria costante di tempo:  $\tau_+ = 1/|\lambda_+|$  e  $\tau_- = 1/|\lambda_-|$ . Essendo  $\lambda_- < \lambda_+ < 0$  abbiamo che  $\tau_+ > \tau_-$ . Di conseguenza l'intervallo di tempo in cui il termine transitorio si estingue e, quindi, viene raggiunta la situazione di "riposo", dipende dalla costante di tempo  $\tau_+$  (ad eccezione di quei casi in cui  $K_+ = 0$  e  $K_- \neq 0$ ).

### **- Modi naturali aperiodici criticamente smorzati**

Quando  $R = 2R_c$  ( $Q = 1/2$ ) le frequenze naturali sono reali e coincidenti, e quindi le due costanti di integrazione  $A$  e  $B$  sono reali. Per la passività e per la presenza della dissipazione, le frequenze naturali sono minori di zero. Pertanto i due modi di evoluzione libera sono aperiodici e smorzati, Figura 2.17b. Questo tipo di evoluzione prende il nome di *evoluzione critica* o *criticamente smorzata*.

### **- Modi naturali armonici con ampiezza smorzata**

Quando  $R < 2R_c$  ( $Q > 1/2$ ) le frequenze naturali sono complesse coniugate. Anche le due costanti di integrazione  $K_+$  e  $K_-$  sono complesse coniugate. Infatti, sostituendo le (157) nelle espressioni (148) si ha

$$\begin{aligned} K_+ &= \frac{V_0}{2} - \frac{i}{2\omega_d} \left( \frac{I_0}{C} + \alpha V_0 \right), \\ K_- &= \frac{V_0}{2} + \frac{i}{2\omega_d} \left( \frac{I_0}{C} + \alpha V_0 \right). \end{aligned} \quad (164)$$

Posto, allora,

$$K_+ = A e^{i\alpha} \quad (165)$$

( $A$  è il modulo del numero complesso  $K_+$  e  $\alpha$  è l'argomento), abbiamo

$$K_- = A e^{-i\alpha}. \quad (166)$$

Pertanto, il termine di evoluzione libera può essere espresso come

$$\begin{aligned}
 v_l(t) &= K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t} = A e^{i\gamma} e^{(-\alpha + i\omega_d)t} + A e^{-i\gamma} e^{(-\alpha - i\omega_d)t} \\
 &= A e^{-\alpha t} \left[ e^{i(\omega_d t + \gamma)} + e^{-i(\omega_d t + \gamma)} \right],
 \end{aligned} \tag{167}$$

ovvero come ( $K = 2A$ )

$$v_l(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \gamma). \tag{168}$$

Dunque la funzione  $v_l(t)$ , che rappresenta l'osservabile fisica tensione elettrica, è una funzione a valori reali, anche se è rappresentata attraverso la somma di due funzioni complesse (ma coniugate). Quando le frequenze naturali sono complesse coniugate può essere conveniente rappresentare direttamente l'integrale generale dell'equazione omogenea associata nella forma (168).

Per la passività e per la presenza della dissipazione, la parte reale delle frequenze naturali è minore di zero, quindi  $\alpha > 0$ . In questa situazione l'andamento temporale dell'evoluzione libera è una oscillazione sinusoidale di pulsazione  $\omega_d$ , con ampiezza che si smorza con legge esponenziale con costante di tempo  $1/\alpha$ . Al parametro  $\omega_d$  si dà il nome di pulsazione propria del circuito. In questo caso il modo di evoluzione libera è *oscillante* (armonico) *con ampiezza smorzata*, Figura 2.17c.

Nel Capitolo 7 mostreremo che un circuito del secondo ordine possiede modi naturali oscillanti con ampiezze smorzate solo se i due elementi dinamici sono diversi o contiene elementi non reciproci, come, ad esempio, i generatori controllati (vedi Capitolo 5).

### - *Modi naturali armonici*

Un circuito  $RLC$  è sempre dissipativo se  $R > 0$ . Mantenendo costante  $R_c$  e riducendo  $R$  al di sotto del valore critico  $2R_c$ , si ottiene una soluzione sinusoidale con ampiezza che decade esponenzialmente nel tempo. Riducendo ulteriormente  $R$  cresce la costante di tempo che caratterizza lo smorzamento dell'ampiezza. Nel caso limite in cui  $R \rightarrow 0$  (circuiti  $LC$ , Figura 2.18) si ha che  $Q \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\omega_d$  tende alla pulsazione di risonanza  $\omega_r$ ; le frequenze naturali  $\lambda_+$  e  $\lambda_-$  diventano immaginarie. In queste condizioni la soluzione in evoluzione libera diventa una senoide di ampiezza costante con pulsazione  $\omega_r$  (Figura 2.17d),

$$v_l(t) = K \cos(\omega_r t + \gamma). \quad (169)$$

E' immediato verificare che, in evoluzione libera la somma dell'energia immagazzinata nell'induttore e dell'energia immagazzinata nel condensatore di un circuito  $LC$  è costante nel tempo: l'energia viene scambiata continuamente tra il condensatore e l'induttore, senza mai essere dissipata. Questo è un esempio di circuito passivo ma conservativo.

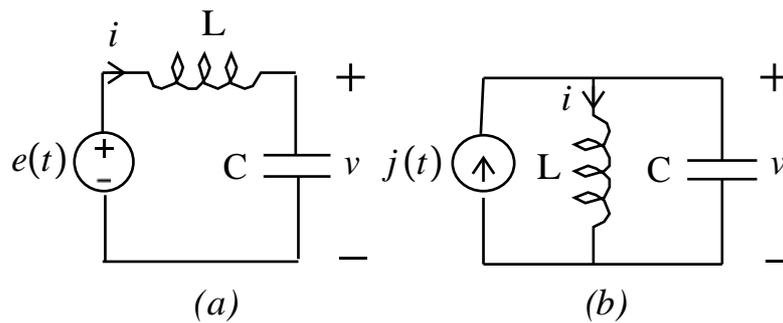


Fig. 2.18 Circuiti  $LC$ .

### 2.6.3 Evoluzione generica

Si consideri, ora, la situazione più generale in cui la tensione del generatore è diversa da zero. Bisogna, ora, determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale (129). Utilizzando i risultati descritti precedentemente si ottiene

$$v(t) = \begin{cases} (K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}) + v_p(t) & \text{se } \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e reali,} \\ (A e^{-\alpha t} + B t e^{-\alpha t}) + v_p(t) & \text{se } \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha, \\ K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \gamma) + v_p(t) & \text{se } \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e complesse coniugate,} \end{cases} \quad (170)$$

dove  $v_p(t)$  è una qualsiasi soluzione dell'equazione completa (129). Essa dipende dalla funzione  $e(t)$ .

Le costanti arbitrarie  $K_+$  e  $K_-$  (o  $A$  e  $B$ , oppure  $K$  e  $\gamma$ ) devono essere scelte in maniera tale da verificare le condizioni iniziali (130). Se  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  e sono reali, imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema algebrico lineare

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= V_0 - v_p(t=0), \\ \lambda_+ K_+ + \lambda_- K_- &= \frac{I_0}{C} - \left. \frac{dv_p}{dt} \right|_{t=0}, \end{aligned} \quad (171)$$

nelle incognite  $K_+$  e  $K_-$ . Se  $\lambda_+ \neq \lambda_-$  e sono complesse coniugate, si ha il sistema di equazioni trigonometriche

$$\begin{aligned} K \cos \gamma &= V_0 - v_p(t=0), \\ K \sin \gamma &= \frac{1}{\omega_d} \left\{ \alpha [V v_p(t=0) - V_0] - \frac{I_0}{C} + \frac{dv_p}{dt} \Big|_{t=0} \right\}, \end{aligned} \quad (172)$$

nelle incognite  $K$  e  $\gamma$ . Lasciamo al lettore la determinazione delle soluzioni di questi due sistemi. Se  $\lambda_+ = \lambda_-$  si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} A &= V_0 - v_p(t=0), \\ -\alpha A + B &= \frac{I_0}{C} - \frac{dv_p}{dt} \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (173)$$

nelle incognite  $A$  e  $B$ . esso è di immediata soluzione.

Se il resistore, il condensatore e l'induttore sono passivi il primo termine nelle espressioni (170) tende asintoticamente a zero con legge esponenziale per  $t \rightarrow +\infty$ , qualunque siano i valori delle condizioni iniziali. Esso è il *termine transitorio*. Dopo che il transitorio si è estinto, la soluzione del circuito è quella di *regime*.

La soluzione particolare  $v_p(t)$  e, quindi, il regime, dipende, oltre che dai parametri caratteristici del circuito, anche dalla forma d'onda dei generatori. Verranno discussi due casi: generatore stazionario e generatore sinusoidale.

#### - *Generatore stazionario*

Si consideri il caso in cui  $e(t) = E$ . E' immediato verificare che esiste una soluzione particolare costante ed essa è

$$v_p(t) = E. \quad (174)$$

Se il circuito è passivo e dissipativo il circuito tende a un regime di funzionamento di tipo stazionario per  $t \rightarrow \infty$ . In particolare, la tensione del condensatore tende al valore dato dalla (174).

**- Generatore sinusoidale**

Si consideri il caso in cui  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ . E' immediato verificare che esiste una soluzione particolare di tipo sinusoidale, con la stessa pulsazione del generatore,

$$v_p(t) = V_m \cos(\omega t + \phi). \quad (175)$$

Operando allo stesso modo in cui abbiamo operato nel § 2.4 il lettore verifichi che

$$V_m = E_m \frac{\omega_r^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \quad (176)$$

e

$$\phi = \begin{cases} \varphi - \arctg \left[ \frac{2\alpha\omega}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] & \text{se } \omega < \omega_r, \\ \varphi - \arctg \left[ \frac{2\alpha\omega}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] + \pi & \text{se } \omega > \omega_r. \end{cases} \quad (177)$$

Se il circuito è passivo e dissipativo il circuito tende per  $t \rightarrow \infty$  a un regime di funzionamento di tipo sinusoidale, che ha la stessa pulsazione della sorgente. In particolare, la tensione del condensatore tende al regime sinusoidale descritto dalla (174).

