

CAPITOLO 5

ELEMENTI CIRCUITALI A PIÙ TERMINALI

5.1 Elementi circuitali con N terminali

Sebbene i componenti circuitali con due terminali siano quelli più comuni, esistono numerosissimi componenti circuitali con N terminali ($N > 2$). Il modello circuitale di un elemento con N terminali prende il nome di N -*polo* (*tripolo*, $N = 3$; *quadripolo*, $N = 4$).

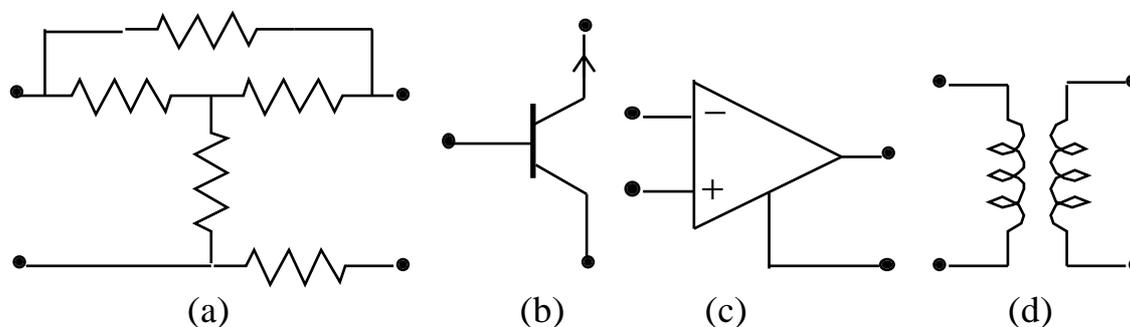


Fig. 5.1 (a) *Quadripolo di resistori*, (b) *transistore bipolare (npn)*, (c) *amplificatore operazionale (polarizzato)*, (d) *trasformatore (induttori accoppiati)*.

Nella teoria dei circuiti gli N -*polo* hanno una duplice ruolo. Primo, sono adoperati come modelli di parti complesse di circuiti (composte da elementi con due o più terminali) che interagiscono con le restanti parti (del circuito di cui fanno parte) attraverso più di due terminali. In Figura 5.1a è rappresentato un quadripolo di resistori. E' possibile caratterizzare il funzionamento di queste parti indipendentemente dal circuito in cui esse sono inserite, così come accade per i bipoli. Come poi faremo vedere, anche per questi elementi è

possibile introdurre il concetto di equivalenza. Come già abbiamo più volte avuto modo di verificare l'analisi dei circuiti può risultare enormemente semplificata e facilitata attraverso l'utilizzo di questo concetto.

Secondo e non meno importante, gli elementi con più di due terminali sono adoperati come modelli per componenti complessi come i transistori, gli amplificatori operazionali, i trasformatori, le linee di trasmissione, etc. Nelle Figure 5.1b, 5.1c e 5.1d sono riportati, rispettivamente, i simboli del transistor bipolare, dell'amplificatore operazionale (polarizzato) e del trasformatore: il transistor bipolare (nnp) è un tripolo, l'amplificatore operazionale (polarizzato) e il trasformatore (induttori accoppiati) sono quadrupoli.

In questa introduzione vengono affrontati questi due problemi:

- (a) *come si estendono le leggi di Kirchhoff a un circuito che contiene anche N -poli ?*
 (b) *come si caratterizza un N -polo ?*

5.1.1 Intensità di corrente e tensioni descrittive di un N -polo

Il funzionamento di un N -polo è definito dalle relazioni esistenti tra le intensità delle correnti che attraversano i terminali e le tensioni tra i terminali. E' necessario approfondire il modo in cui debbono essere scelte le intensità di corrente e le tensioni necessarie e sufficienti a descrivere il comportamento di un N -polo.

Un N -polo ha N intensità di corrente distinte (tante quanti sono i terminali) e $N(N-1)/2$ tensioni distinte (tante quante sono le coppie di terminali senza ripetizione). Sono necessarie tutte queste grandezze per descrivere il funzionamento del N -polo?

Per non appesantire l'esposizione si faccia riferimento al circuito descritto in Figura 5.2a: esso è costituito da due bipoli e da un tripolo. Tutti i risultati che troveremo si estendono senza alcuna limitazione a situazioni più generali.

Un tripolo è caratterizzato dalle tre intensità di corrente, i_1 , i_2 e i_3 , e dalle tre tensioni, v_{12} , v_{23} e v_{13} (v_{ij} è la tensione tra il terminale "i" e il terminale "j", con il terminale "i" contrassegnato con il segno "+" e il terminale "j" contrassegnato con il segno "-"), Figura 5.2b.

Il funzionamento del tripolo è descritto dalle relazioni tra le tensioni v_{12} , v_{23} e v_{13} e le intensità di corrente i_1 , i_2 e i_3 . Queste relazioni dipendono solo dalla costituzione fisica del componente che si intende modellare? La risposta è no.

Ora verrà mostrato che le tre intensità di corrente i_1 , i_2 e i_3 non sono tra loro indipendenti, e così anche le tre tensioni v_{12} , v_{23} e v_{13} .

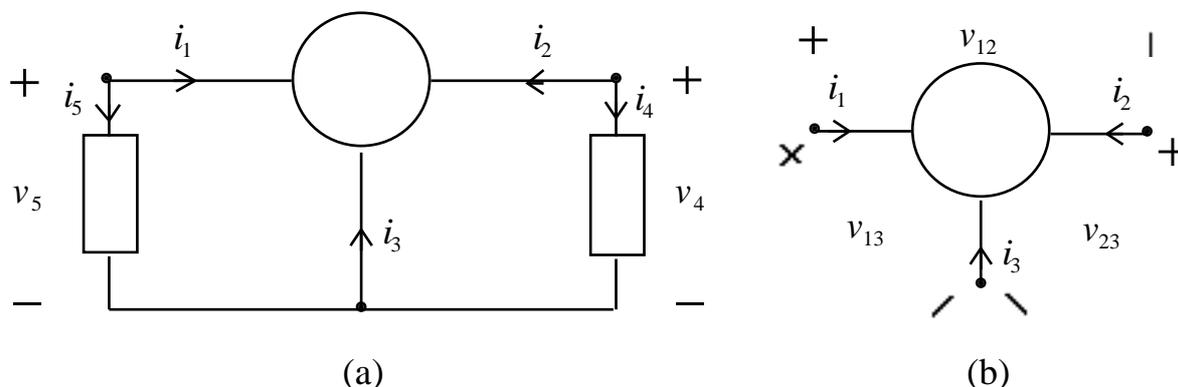


Fig. 5.2 Circuito costituito da un tripolo e due bipoli.

Applicando la legge della conservazione della carica (vedi § 1.5.1) ad una superficie chiusa Σ che contiene il tripolo e taglia i tre terminali, si ottiene che

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{dQ_\Sigma}{dt}, \quad (1)$$

dove Q_Σ è la carica elettrica libera racchiusa dalla superficie Σ . Essa si trova sotto forma di carica superficiale sulle superfici delle parti conduttrici del componente e nelle regioni in cui le caratteristiche elettriche dei mezzi materiali non sono omogenee. Questa equazione è l'estensione a un componente con tre terminali dell'equazione (40) riportata nel Capitolo 1, che descrive la relazione tra le due intensità di corrente di un componente con due terminali.

In condizioni stazionarie abbiamo

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0. \quad (2)$$

È evidente che questa proprietà non è più vera quando le grandezze circuitali variano nel tempo. Anche qui valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato nel Capitolo 1, quando abbiamo introdotto il concetto di bipolo. In particolare, in condizioni di funzionamento lentamente variabili, pur essendo $dQ_\Sigma/dt \neq 0$, la derivata dQ_Σ/dt , considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con le tre intensità di corrente del componente e, quindi, abbiamo

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \cong 0. \quad (3)$$

Come per gli elementi circuitali a due terminali, le intensità di corrente di un tripolo, i_1 , i_2 e i_3 non sono tra loro indipendenti: solo due lo sono (nel caso di un componente a due terminali, il bipolo, solo una corrente è indipendente).

In generale, la somma di tutte le correnti di un N -polo (i versi di riferimento per le intensità di corrente sono tutti entranti nella superficie limite del componente) è, in condizioni di funzionamento lentamente variabili, uguale a zero (con buona approssimazione),

$$\sum_{h=1}^N i_h(t) = 0. \quad (4)$$

Pertanto, per un componente con N terminali solo $N - 1$ intensità di corrente sono indipendenti tra loro.

Si applichi, ora, la legge di Faraday-Neumann (vedi § 1.5.1) a una linea chiusa Γ orientata (ad esempio, in verso orario) che passa per i tre terminali del tripolo. Si ottiene

$$v_{12} + v_{23} - v_{13} = -\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}, \quad (5)$$

dove Φ_Γ è il flusso del campo magnetico concatenato con la linea chiusa orientata. In condizioni stazionarie abbiamo

$$v_{12} + v_{23} - v_{13} = 0. \quad (6)$$

È evidente che anche questa proprietà non è più vera quando le grandezze circuitali variano nel tempo. Anche in questo caso valgono tutte le considerazioni che abbiamo sviluppato nel Capitolo 1, quando abbiamo introdotto il concetto di bipolo. In particolare, in condizioni di funzionamento lentamente variabili, pur essendo $d\Phi_\Gamma/dt \neq 0$, la derivata $d\Phi_\Gamma/dt$, considerata in valore assoluto, è trascurabile se confrontata con le tre tensioni del componente e, quindi, abbiamo

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) - v_{13}(t) \cong 0. \quad (7)$$

Quindi, anche le tre tensioni v_{12} , v_{23} e v_{13} non sono indipendenti tra loro: solo due lo sono (ricordate, il componente a due terminali è caratterizzabile da una sola tensione).

In generale, solo $(N-1)$ delle $N(N-1)/2$ di tensioni di un N -polo sono indipendenti. Lasciamo al lettore la verifica di questa proprietà generale.

Allo scopo di individuare un insieme di correnti indipendenti e un insieme di tensioni indipendenti, tra tutti i terminali del componente se ne scelga uno come terminale di riferimento; nell'esempio considerato viene scelto il terminale "3" come terminale di riferimento. A esso si dà il nome di *terminale comune*. Si considerino, ora, le due intensità di corrente che attraversano gli altri 2 terminali, i_1 e i_2 . Esse sono, ovviamente, indipendenti e soddisfano la cosiddetta *condizione di completezza*. Considerata, infatti, l'intensità della corrente che attraversa il terminale comune, i_3 , essa può essere espressa in funzione di i_1 e i_2 attraverso la relazione

$$i_3 = -i_1 - i_2. \quad (8)$$

Si considerino, poi, le tensioni tra ciascuno dei terminali diversi da quello comune e quest'ultimo, orientate contrassegnando il terminale comune con il segno "−" e gli altri due terminali con il segno "+", v_{13} e v_{23} . Esse sono indipendenti e soddisfano la condizione di completezza. Infatti, la tensione tra i due terminali diversi da quello comune, v_{21} , può essere espressa in funzione delle altre due attraverso la relazione

$$v_{21} = v_{23} - v_{13}. \quad (9)$$

Tenendo conto dei vincoli imposti dalle (8) e (9), il comportamento del tripolo è completamente descritto dalle due intensità di corrente i_1 e i_2 e dalle due tensioni v_{13} e v_{23} . Per questa ragione all'insieme costituito dalle intensità di corrente i_1 e i_2 si dà il nome di *insieme delle intensità di corrente descrittive* del tripolo e all'insieme delle tensioni v_{13} e v_{23} si dà il nome di *insieme delle tensioni descrittive*. (Un bipolo ha una sola corrente e una sola tensione descrittiva.) L'insieme delle intensità di corrente descrittive e l'insieme delle corrispondenti tensioni descrittive dipendono dalla scelta del terminale comune. Il funzionamento del tripolo è descritto da due relazioni indipendenti tra le intensità di corrente descrittive i_1 e i_2 e le corrispondenti tensioni descrittive v_{13}

e v_{23} : queste relazioni dipendono dalla costituzione fisica dell'oggetto e sono le *relazioni caratteristiche* dell'elemento.

Esistono numerosi componenti con tre terminali. Qui menzioniamo, ad esempio, i transistori (bipolari, MOSFET, ...), i generatori di tensione trifase e i motori trifase. Ricordiamo che il tripolo è anche il modello di parti di circuiti complesse, costituite da tanti elementi, che interagiscono con le altre parti solo attraverso tre terminali.

Il transistore bipolare ideale è un tripolo (cioè un elemento a tre terminali) adinamico, non lineare e tempo invariante. In Figura 5.1b è illustrato il simbolo del transistore bipolare *npn*. Ogni terminale del transistore ha un nome, che ricorda la parte del dispositivo fisico (del quale il tripolo in esame è il modello) a cui il terminale è collegato. Nei corsi di elettronica studierete le caratteristiche di funzionamento di questi componenti e le loro applicazioni. Qui ci limitiamo a osservare che quando si deve caratterizzare un transistore, essendo un tripolo, bisogna scegliere un terminale comune. Sono possibili tre scelte: *caratterizzazione a base comune* (il terminale comune è il terminale di base), *caratterizzazione a emettitore comune* (il terminale comune è il terminale di emettitore) e *caratterizzazione a collettore comune* (il terminale comune è il terminale di collettore).

Le relazioni caratteristiche di un tripolo adinamico, come, ad esempio, il transistore o un tripolo di resistori, sono di tipo algebrico. Se si considerano, ad esempio, come variabili indipendenti le due tensioni descrittive v_{13} e v_{23} si ha, in generale, per le intensità di corrente i_1 e i_2

$$i_1 = g_1(v_{13}, v_{23}), \quad i_2 = g_2(v_{13}, v_{23}); \quad (10)$$

le funzioni di due variabili g_1 e g_2 dipendono dalla natura fisica dell'elemento che il tripolo rappresenta. In generale esse sono funzioni non lineari, come, ad esempio, per i transistori. Per un tripolo di soli resistori lineari g_1 e g_2 sono funzioni lineari. Le relazioni caratteristiche di tripoli che contengono elementi dinamici sono più complesse: esse sono relazioni miste di tipo algebrico-differenziale.

Osservazione

L'estensione dei risultati che abbiamo descritto a un componente con N terminali è immediata. Si ordinino i terminali etichettandoli (ad arbitrio) con i

numeri naturali che vanno da “1” a “ N ” e, si scelga il terminale “ N ” come terminale comune. Allora, le intensità di corrente e le tensioni descrittive sono, rispettivamente, i_1, i_2, \dots, i_{N-1} e $v_{1N}, v_{2N}, \dots, v_{N-1N}$; i_h è l’intensità della corrente che attraversa il terminale h –esimo e v_{hN} è la tensione tra il terminale “ h ” e il terminale comune “ N ”. L’intensità della corrente che attraversa il terminale comune, i_N , vale

$$i_N = -\sum_{h=1}^{N-1} i_h, \quad (11)$$

e la tensione v_{hk} tra il terminale “ h ” e il terminale “ k ” (con h e k diversi da N) vale

$$v_{hk} = v_{hN} - v_{kN}. \quad (12)$$

Il funzionamento di un N – polo è descritto da $N - 1$ relazioni tra le intensità di corrente e le tensioni descrittive, relazioni che dipendono solo dalla costituzione fisica del componente che l’elemento rappresenta. L’insieme di queste relazioni costituiscono le *relazioni caratteristiche* del N – polo.

◆

5.1.2 Leggi di Kirchhoff per circuiti con N – poli

Una volta scelto il terminale comune sono automaticamente definite le intensità di corrente descrittive e le tensioni descrittive del N – polo. All’insieme delle intensità di corrente e tensioni descrittive di un N – polo è possibile associare un grafo orientato. Si consideri il tripolo illustrato in Figura 5.3a e si scelga il terminale “3” come terminale comune. Si costruisca il grafo orientato incernierato nel terminale comune, ottenuto collegando i terminali “1” e “2” a quello comune “3”, Figura 5.3b; i due lati sono orientati in modo tale che le frecce confluiscono nel terminale comune e quindi siano concordi con i versi di riferimento delle intensità di corrente descrittive. A ogni lato si associno la corrispondente intensità di corrente descrittiva e la corrispondente tensione descrittiva, così come illustrato in Figura 5.3b.

In questa rappresentazione non compaiono né l’intensità della corrente che attraversa il terminale comune, né la tensione tra i terminali “1” e “2”.

Ricordiamoci che queste grandezze possono essere determinate una volta note le intensità di corrente e le tensioni descrittive, attraverso le relazioni (7) e (8).

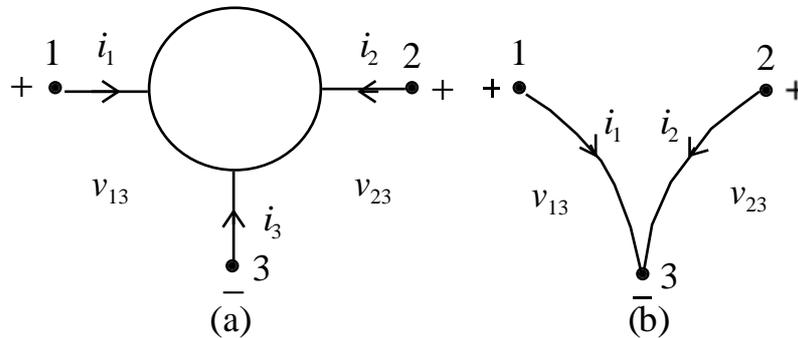


Fig. 5.3 (a) Tripolo e (b) grafo corrispondente.

Osservazione

Si può dare una immagine “concreta” alle intensità di corrente e tensioni descrittive di un tripolo, pensandole come le intensità di corrente e le tensioni di due “bipoli” fittizi collegati, rispettivamente, alle coppie di morsetti “1”-“3” e “2”-“3”, secondo gli archi del grafo (su ogni lato viene fatta la convenzione dell’utente). Si noti che il comportamento del “bipolo” fittizio collegato alla coppia di morsetti “1”-“3” dipende dal comportamento del “bipolo” fittizio collegato alla coppia di morsetti “2”-“3” e viceversa. Ciò è l’essenza della natura del tripolo.

◆

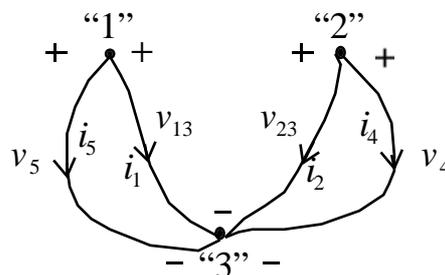


Fig. 5.4 Grafo del circuito di Figura 5.2a.

Si costruisca il grafo del circuito in esame secondo le regole che abbiamo appena definito. In Figura 5.4 è riportato il grafo del circuito rappresentato in Figura 5.2a.

Osservazione

In generale, il grafo di un circuito che contiene N -poli può essere costruito sostituendo a ciascun componente con N terminali un grafo simile a quello di un tripolo (vedi Figura 5.3a), costituito di N nodi e $N-1$ lati incernierati nel nodo comune.



A questo punto è immediata l'estensione delle leggi di Kirchhoff a circuiti costituiti, in generale, da N -poli.

Legge di Kirchhoff per le correnti

La somma algebrica delle intensità di corrente descrittive incidenti in ciascun nodo del circuito è istante per istante uguale a zero.



Legge di Kirchhoff per le tensioni

La somma algebrica delle tensioni descrittive lungo ogni maglia del circuito è istante per istante uguale a zero.



Anche in questo caso la legge di Kirchhoff per le correnti discende dalla legge della conservazione della carica e quella per le tensione discende dalla legge di Faraday Neumann, con la solita ipotesi di “condizione di funzionamento lentamente variabile”.

Per i circuiti costituiti da N -poli valgono tutte le proprietà delle equazioni di Kirchhoff che sono state illustrate nel Capitolo 2. In particolare, le equazioni di Kirchhoff possono essere espresse attraverso la matrice di incidenza e la matrice di un insieme di maglie fondamentali. Inoltre, è possibile introdurre i potenziali di nodo e le correnti di maglia così come è stato fatto per i circuiti di bipoli.

Esercizio

Si scrivano le equazioni di Kirchhoff del circuito illustrato in Figura 5.2a. Un'insieme massimale di equazioni indipendenti per le correnti si ottiene applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi "1" e "2", Figura 5.5. Un insieme massimale di equazioni indipendenti per le tensioni si ottiene applicando la seconda legge di Kirchhoff alle due maglie del grafo del circuito, Figura 5.5. Le equazioni di interconnessione sono

$$\begin{aligned} i_1 + i_4 = 0, \quad i_2 + i_5 = 0, \quad -i_1 - i_2 - i_4 - i_5 = 0, \\ v_{13} - v_4 = 0, \quad v_{23} - v_5 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

A queste equazioni bisogna aggiungere le equazioni caratteristiche dei due bipoli e le due equazioni caratteristiche che descrivono il funzionamento del tripolo. In questo modo si ottengono otto equazioni indipendenti nelle otto incognite $i_1, i_2, i_4, i_5, v_{13}, v_{23}, v_4$ e v_5 . Osserviamo, ancora una volta, che la corrente i_3 e la tensione v_{12} non appaiono direttamente; esse possono essere determinate attraverso le relazioni (7) e (8) una volta note le grandezze descrittive del tripolo.

◆

5.1.3 Potenza elettrica assorbita da un N -polo

Per un N -polo è possibile introdurre la potenza elettrica assorbita, che indicheremo con $p(t)$, così come è stato fatto per il bipolo: $p(t)\Delta t$ è l'energia elettrica assorbita dal N -polo nell'intervallo di tempo infinitesimo $(t, t + \Delta t)$.

Si scelga il terminale comune, ad esempio, il terminale " N ", si costruisca il grafo del N -polo e si introducano le intensità di corrente e le tensioni descrittive adottando su ogni lato del grafo la convenzione dell'utilizzatore per i versi di riferimento. In condizioni di funzionamento lentamente variabili la potenza elettrica assorbita dal N -polo è, con buona approssimazione, data dall'espressione

$$p = \sum_{h=1}^{N-1} i_h v_{hN}. \quad (14)$$

L'espressione (14) è esatta solo nel regime stazionario. La dimostrazione di questa proprietà, come nel caso del bipolo, richiede strumenti e teorie avanzate che saranno oggetto di corsi della laurea specialistica. Chi volesse approfondire questa questione troverà degli spunti nell'**Appendice A**.

L'espressione (14) si riduce all'espressione della potenza elettrica assorbita da un bipolo per $N=2$. Per un tripolo l'espressione della potenza elettrica assorbita è (abbiamo scelto il terminale "3" come terminale di riferimento)

$$p = i_1 v_{13} + i_2 v_{23}. \quad (15)$$

Ovviamente la potenza assorbita dal N -polo è indipendente dalla scelta del terminale comune. Per semplicità facciamo riferimento a un tripolo (il ragionamento che faremo si estende senza alcuna difficoltà a un generico N -polo). La (15) è l'espressione della potenza assorbita dal tripolo quando si sceglie il terminale "3" come terminale comune. Si consideri, ora, l'espressione della potenza assorbita che si ottiene scegliendo un altro terminale come terminale comune, ad esempio, il terminale "1". In questo caso le intensità di corrente descrittive sono i_2 e i_3 , e le tensioni descrittive sono le tensioni v_{21} e v_{31} . Quindi, l'espressione della potenza assorbita è

$$\dot{p} = v_{21} i_2 + v_{31} i_3. \quad (16)$$

Le tensioni descrittive v_{21} e v_{31} possono essere rappresentate attraverso le tensioni descrittive v_{13} e v_{23} ,

$$v_{21} = v_{23} - v_{13}, \quad (17)$$

$$v_{31} = -v_{13}. \quad (18)$$

Sostituendo queste due relazioni nella (16) si ha, allora,

$$\dot{p} = (v_{23} - v_{13}) i_2 + (-v_{13}) i_3 = v_{23} i_2 + v_{13} (-i_2 - i_3). \quad (19)$$

Utilizzando la (7) si ha

$$\dot{p} = v_{21} i_2 + v_{31} i_3 = v_{23} i_2 + v_{13} (-i_2 - i_3) = v_{23} i_2 + v_{13} i_1 = p. \quad (20)$$

Un'immediata conseguenza di questa estensione è la generalizzazione del teorema della conservazione delle potenze virtuali e delle potenze elettriche a circuiti costituiti da bipoli e N -poli.

Conservazione delle potenze

La somma delle potenze elettriche assorbite da tutti gli elementi di un generico circuito è istante per istante uguale a zero.

5.2 Doppi bipoli

In molte applicazioni i terminali di un N -polo possono essere associati naturalmente a coppie. Ad esempio, in un amplificatore audio la coppia dei terminali di "ingresso" è collegata a un microfono e la coppia dei terminali di "uscita" a una cassa acustica, come in Figura 5.5; anche i quattro terminali di un trasformatore sono raggruppati naturalmente in due coppie, Figura 5.1d.

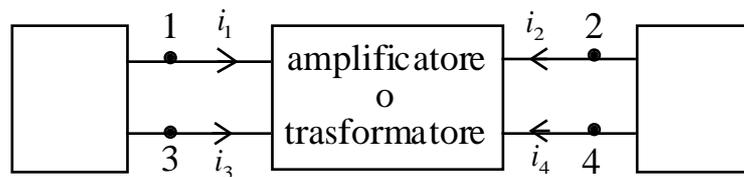


Fig. 5.5 Un esempio di doppio bipolo.

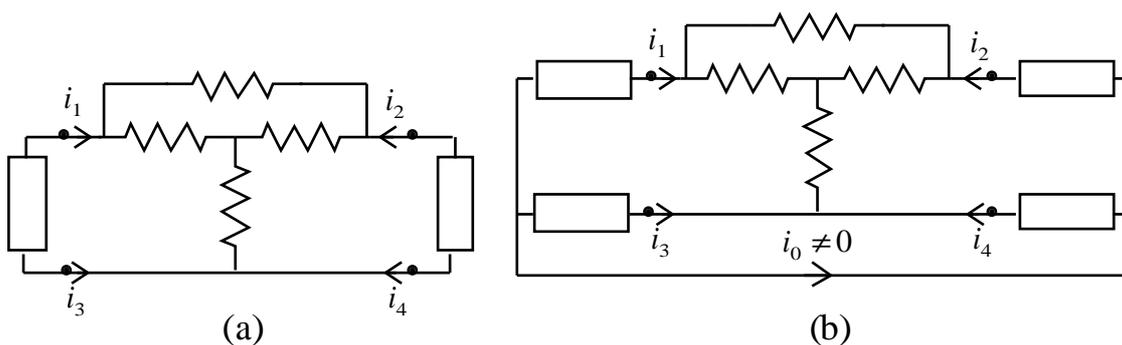


Fig. 5.6 (a) Il quadrupolo riportato in Figura 5.1a è collegato in modo tale da funzionare come doppio bipolo; (b) lo stesso quadrupolo in questo circuito non si comporta come doppio bipolo.

Può anche accadere che, pur non essendo possibile raggruppare naturalmente i quattro terminali dell'elemento in due coppie, essi lo siano per come sono

effettivamente collegati al resto del circuito in cui l'elemento è inserito. Un esempio di ciò è illustrato in Figura 5.6a, dove il quadripolo di resistori riportato in Figura 5.1a è collegato a due bipoli.

In tutti questi casi le quattro correnti i_1 , i_2 , i_3 e i_4 , oltre a verificare la relazione (4), cioè

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0, \quad (21)$$

verificano le relazioni

$$i_1 + i_3 = 0, \quad (22)$$

$$i_2 + i_4 = 0, \quad (23)$$

qualsiasi siano le condizioni di funzionamento. (Si osservi che le relazioni (22) e (23) implicano la relazione (21).) Tali vincoli riducono il numero di correnti effettivamente indipendenti (correnti descrittive) da tre a due: un possibile insieme completo di correnti descrittive è costituito dalle correnti i_1 e i_2 . In questi casi, inoltre, per descrivere l'interazione dell'elemento in esame con il resto del circuito in cui è effettivamente inserito è sufficiente considerare solo le tensioni v_1 e v_2 .

Una coppia di terminali è detta *porta* se la somma delle intensità delle correnti che li attraversano è uguale a zero. A ciascuna porta è associata un'intensità di corrente e una tensione.

Un *doppio bipolo* è un elemento circuitale con due porte, Figura 5.7. Con i due terminali di sinistra designeremo la prima porta, sicché tensione e l'intensità di corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice "1": v_1 , i_1 . Analogamente, con i due terminali di destra designeremo la seconda porta, sicché tensione e l'intensità di corrente associate a questi terminali saranno marcate con il pedice "2": v_2 , i_2 . Per entrambe le porte i versi di riferimento per l'intensità di corrente e la tensione sono stati scelti concordemente con la convenzione dell'utilizzatore.

Il funzionamento del doppio bipolo è descritto da due relazioni indipendenti tra le due intensità di corrente i_1 e i_2 e le due tensioni v_1 e v_2 , relazioni che dipendono unicamente dalla natura fisica del componente che il doppio bipolo rappresenta.

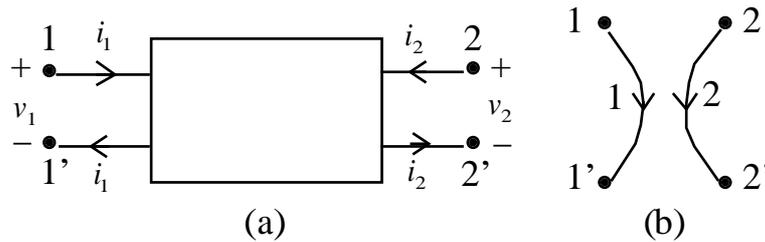


Fig. 5.7 (a) Doppio bipolo; (b) il grafo elementare di un doppio bipolo.

Il grafo di un doppio bipolo può essere rappresentato da due lati e quattro nodi come illustrato in Figura 5.7b. Esso non è connesso. Ciò implica che le tensioni e le intensità di corrente delle due porte non sono legate tra loro attraverso le leggi di Kirchhoff, ma solo tramite le relazioni caratteristiche del doppio bipolo. Pertanto i grafi dei circuiti che contengono doppi bipoli non sono connessi.

L'espressione della potenza elettrica assorbita da un doppio bipolo è

$$p = i_1 v_1 + i_2 v_2. \quad (24)$$

Essa è uguale alla somma delle potenze elettriche assorbite dalle singole porte. L'espressione (24) può essere ottenuta a partire dall'espressione della potenza elettrica assorbita dal quadripolo corrispondente utilizzando le relazioni (22) e (23). Lasciamo al lettore la dimostrazione.

Osservazione

Un tripolo può essere descritto come se fosse un doppio bipolo una volta scelto il terminale comune. Ciò è evidente se si considera il grafo corrispondente: esso è costituito da due lati e tre nodi. Ad esempio, se si sceglie il terminale "3" come terminale comune (Figura 5.3a), il terminale "1" e il terminale "2" possono essere formalmente considerati come due porte e, quindi, il componente come un doppio bipolo: una porta è definita dalla coppia (i_1, v_{13}) e l'altra porta è definita dalla coppia (i_2, v_{23}) . Anche in questo caso abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore per ciascuna porta. A differenza del grafo riportato in Figura 5.7b, esso è connesso per la presenza di un nodo comune (grafo incernierato).



Osservazione

Nel circuito illustrato in Figura 5.6b lo stesso quadrupolo riportato in Figura 5.1a è collegato a quattro bipoli in maniera tale che non sia possibile raggruppare i suoi terminali a coppie. In questo caso essendo $i_0 \neq 0$ si ha $i_1 \neq -i_3$ e $i_2 \neq -i_4$, e l'unico vincolo per le intensità di corrente è quello espresso dalla relazione (21). Quindi, tre sono le correnti indipendenti; le correnti i_1 , i_2 e i_3 sono un insieme di correnti descrittive e le tensioni v_{14} , v_{24} e v_{34} sono le corrispondenti tensioni descrittive (è stato scelto come terminale di riferimento il terminale "4").

Se il quadrupolo illustrato in Figura 5.1a funziona in modo tale da non potere essere descritto come doppio bipolo, come, ad esempio, nel caso riportato in Figura 5.3b, esso può essere rappresentato come un *tre-porte*. Scegliendo, ad esempio, il terminale "4" come terminale comune, le tre porte sono associate formalmente alle tre coppie di grandezze descrittive (i_1, v_{14}) , (i_2, v_{24}) e (i_3, v_{34}) .



Esistono numerosi elementi circuitali descrivibili come doppi bipoli che rivestono un ruolo fondamentale nella creazione di modelli di dispositivi fisici. I *doppi bipoli dinamici* sono quegli elementi il cui funzionamento è descritto da relazioni caratteristiche di tipo "istantaneo". Nei prossimi paragrafi descriveremo i *generatori controllati*, il *giratore*, il *trasformatore ideale*, i doppi bipoli di resistori lineari, e ne illustreremo alcune applicazioni. Nell'ultimo paragrafo di questo Capitolo descriveremo il doppio bipolo di natura dinamica più importante, cioè il *trasformatore (reale)*. Ricordiamo che c'è un altro doppio bipolo molto importante, esso è l'*amplificatore operazionale* (il simbolo è riportato in Figura 5.1c). Questo elemento verrà descritto nei corsi di elettronica.

5.3 Generatori controllati lineari

Finora abbiamo considerato due tipi fondamentali di generatori, i generatori ideali di tensione e i generatori ideali di corrente. La tensione di un generatore

ideale di tensione e l'intensità di corrente di un generatore ideale di corrente sono indipendenti dalle altre grandezze del circuito e sono assegnate.

In questo paragrafo studiamo i *generatori controllati*: le tensioni dei generatori di tensione controllati e le intensità di corrente dei generatori di corrente controllati sono “controllate” da altre grandezze del circuito. Questi generatori, che di solito si utilizzano come modelli lineari per i transistori ed altri dispositivi a semiconduttore, sono usati anche per modellare circuiti notevolmente complessi, che si comportano come doppi bipoli.

I generatori controllati lineari sono doppi bipoli adinamici lineari: una delle due grandezze - tensione o intensità di corrente - ad una delle due porte è direttamente proporzionale a una delle due grandezze - tensione o intensità di corrente - all'altra porta. Per convenzione, la porta che funziona da “generatore” è la porta “2” e la porta che “controlla” il generatore è la porta “1”. Spesso utilizzeremo l'espressione generatore indipendente al posto di generatore ideale per meglio distinguerlo da un generatore controllato.

Considerando tutte le possibili combinazioni si hanno i seguenti generatori controllati.

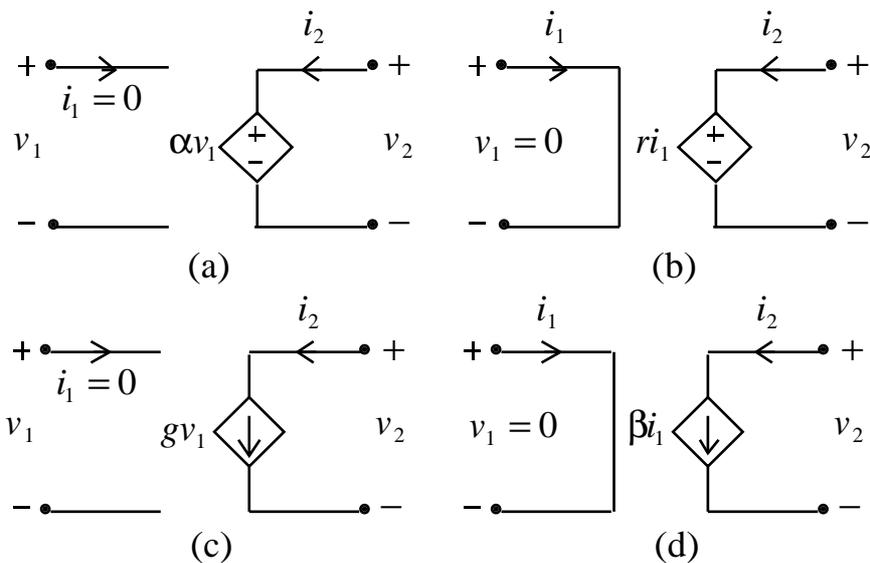


Fig. 5.8 Simboli dei quattro tipi di generatori controllati lineari.

Generatore di tensione controllato in tensione

Il *generatore di tensione controllato in tensione* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche

$$i_1 = 0, \quad (25)$$

$$v_2 = \alpha v_1, \quad (26)$$

dove α è una costante adimensionale detta *rapporto di trasferimento di tensione*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 5.8a. La porta “1” è equivalente a un circuito aperto e la porta “2” è equivalente a un generatore ideale di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dalla tensione della porta “1”.

Generatore di tensione controllato in corrente

Il *generatore di tensione controllato in corrente* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche

$$v_1 = 0, \quad (27)$$

$$v_2 = r i_1, \quad (28)$$

dove r è una costante, che prende il nome di *transresistenza* del generatore controllato; r si misura in *ohm*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 5.8b. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore ideale di tensione che impone una tensione dipendente linearmente dall'intensità di corrente che attraversa la porta “1”.

Generatore di corrente controllato in tensione

Il *generatore di corrente controllato in tensione* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$i_1 = 0, \quad (29)$$

$$i_2 = g v_1, \quad (30)$$

dove g è una costante, che prende il nome di *transconduttanza*; g si misura in *siemens*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 5.8c. La porta “1” è equivalente a un circuito aperto e la porta “2” è equivalente a un generatore di corrente ideale che impone un'intensità di corrente dipendente linearmente dalla tensione della porta “1”.

Generatore di corrente controllato in corrente

Il *generatore di corrente controllato in corrente* è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni costitutive

$$v_1 = 0, \quad (31)$$

$$i_2 = \beta i_1, \quad (32)$$

dove β è una costante adimensionale, che prende il nome di *rapporto di trasferimento di corrente*. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Figura 5.8d. La porta “1” è equivalente a un corto circuito e la porta “2” è equivalente a un generatore ideale di corrente che impone un'intensità di corrente dipendente linearmente dalla corrente che circola nella porta “1”.

Per i circuiti che contengono, oltre a resistori lineari e generatori indipendenti (ideali), anche generatori controllati lineari vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti. Il lettore verifichi questa affermazione. Attenzione, però, a come si applica questa proprietà. Bisogna spegnere solo i generatori ideali, cioè quelli indipendenti, per costruire i circuiti ausiliari: i generatori controllati sono sempre in funzione.

Osservazione

Il fatto che le porte di controllo dei generatori controllati (ideali) si comportino come corto circuiti o circuiti aperti rende possibile accoppiare unidirezionalmente (almeno nella situazione ideale) parti di un circuito utilizzando generatori controllati. Illustreremo più avanti qualche applicazione di questo tipo.



La potenza elettrica assorbita da un generatore controllato è uguale alla potenza assorbita dalla porta “2”: la potenza assorbita dalla porta “1” è, in qualsiasi condizione di funzionamento, uguale a zero. Siccome la porta “2” si comporta come se fosse un generatore ideale la potenza da essa assorbita può risultare

anche negativa. Di conseguenza, la potenza elettrica assorbita dai generatori controllati può essere anche negativa, quindi i generatori controllati sono doppi bipoli attivi.

Per i circuiti che contengono generatori controllati non vale la proprietà della non amplificazione delle tensioni e delle intensità di corrente. Il lettore verifichi questa affermazione.

Esercizio

Il lettore dimostri che, connettendo in maniera opportuna un generatore di corrente controllato in tensione e un generatore di tensione controllato in corrente, è possibile realizzare gli altri due tipi di generatori controllati.

◆

Applicazione: un amplificatore di potenza

Si consideri il circuito di Figura 5.9 in cui il generatore di corrente controllato in corrente ha un terminale della porta “1” (porta di controllo) e un terminale della porta “2” (porta attiva) collegati ad un nodo comune “a” a cui è collegato anche il resistore lineare di resistenza R_0 . Un generatore indipendente di tensione e_i agisce da ingresso e si desidera determinare il rapporto tra la potenza assorbita dal resistore lineare R e la potenza erogata dal generatore ideale di tensione e_i .

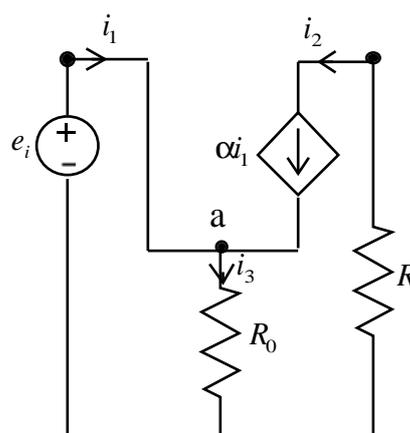


Fig. 5.9 *Un amplificatore di potenza che impiega un generatore di corrente controllato in corrente.*

Applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo “a” abbiamo

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0; \quad (33)$$

inoltre, dalla relazione caratteristica del generatore controllato abbiamo

$$i_2 = \beta i_1, \quad (34)$$

dove β è il rapporto di trasferimento di corrente. La corrente i_3 nel resistore R_0 è data da

$$i_3 = \frac{e_i}{R_0}. \quad (35)$$

Combinando queste tre relazioni immediatamente si ottiene

$$i_1 = \frac{e_i}{\alpha R_0} \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right), \quad (36)$$

$$i_2 = \frac{e_i}{R_0} \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right). \quad (37)$$

La potenza erogata dal generatore di tensione vale, allora,

$$p_i = e_i i_1 = e_i^2 \frac{1}{\beta R_0} \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right), \quad (38)$$

mentre la potenza assorbita dal resistore R vale

$$p = Ri^2 = e_i^2 \frac{R}{R_0^2} \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right)^2. \quad (39)$$

Quindi il *guadagno di potenza* p/p_i è

$$\frac{p}{p_i} = \frac{\beta^2}{1 + \beta} \frac{R}{R_0}. \quad (40)$$

Scegliendo opportunamente R e R_0 si può ottenere un guadagno di potenza arbitrariamente grande per un valore fissato di rapporto di trasferimento β . L'amplificazione di potenza è resa possibile dal fatto che il generatore controllato è un elemento attivo.

◆

Osservazione

I bipoli costituiti da resistori lineari, generatori controllati lineari e generatori indipendenti (Figura 5.10a) possono essere rappresentati attraverso il generatore equivalente di Thévenin-Norton, perché vale ancora la proprietà della sovrapposizione degli effetti. La tensione a vuoto si determina calcolando il valore della tensione v quando $i = 0$ e la corrente di corto circuito si determina calcolando il valore della corrente i quando $v = 0$. Attenzione, però, a come si calcola la resistenza (conduttanza) equivalente. La resistenza (conduttanza) equivalente deve essere calcolata spegnendo solo i generatori ideali, cioè quelli indipendenti.

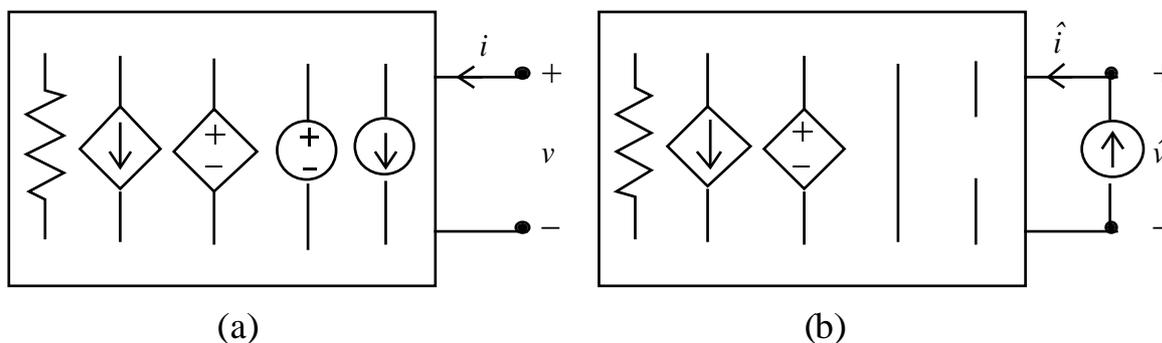


Fig. 5.10 (a) Bipolo costituito da resistori e generatori controllati lineari e generatori ideali; (b) lo stesso bipolo con i generatori ideali spenti.

La resistenza equivalente, essendo, per definizione, il rapporto tra la tensione v e la corrente i del bipolo (avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore) quando tutti i generatori ideali (indipendenti) sono spenti,

$$R_{eq} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}}, \quad (41)$$

può essere determinata risolvendo, ad esempio, il circuito illustrato in Figura 5.10b. In questo circuito il bipolo è alimentato da un generatore ideale di corrente \hat{i} ; lo stesso risultato può essere ottenuto alimentando il bipolo con un generatore ideale di tensione \hat{v} .

Per la soluzione del circuito di Figura 5.10b potrebbero non essere sufficienti le tecniche di riduzione serie-parallelo che abbiamo illustrato nel precedente capitolo a causa della presenza dei generatori controllati. Comunque esso può essere risolto, senza alcuna difficoltà, utilizzando, ad esempio, il metodo dei potenziali di nodo.

Osservazione

E' stato mostrato nel precedente capitolo che la resistenza equivalente di Thévenin lega la tensione a vuoto E_0 e l'intensità di corrente di corto circuito J_{cc} del bipolo in esame attraverso la relazione $E_0 = -R_{eq}J_{cc}$, vedi § 3.3. Di conseguenza, la resistenza equivalente può essere determinata anche utilizzando l'espressione

$$R_{eq} = \frac{v|_{i=0}}{i|_{v=0}} = -\frac{E_0}{J_{cc}}. \quad (42)$$

Questo modo di calcolare la resistenza equivalente di Thévenin del bipolo è particolarmente conveniente quando il bipolo contiene generatori controllati.

◆

5.4 Giratore

Il *giratore* è un doppio bipolo lineare definito dalle seguenti relazioni

$$i_1 = Gv_2, \quad (43)$$

$$i_2 = -Gv_1, \quad (44)$$

dove la costante G è detta *conduttanza di girazione*; il simbolo del giratore è illustrato in Figura 5.11. Per i circuiti che contengono, oltre a resistori lineari e

generatori indipendenti (ideali), anche giratori vale la proprietà della sovrapposizione degli effetti.

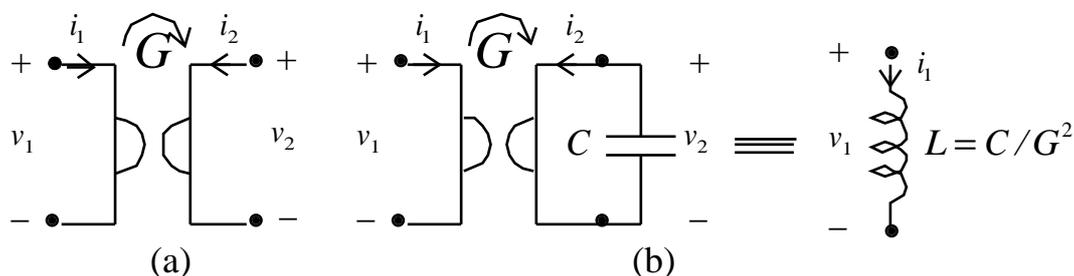


Fig. 5.11 (a) Simbolo del giratore; (b) un giratore terminato alla porta con un condensatore è equivalente a un induttore.

Si verifica immediatamente che la potenza elettrica assorbita dal giratore è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi esso è un doppio bipolo passivo che né dissipa e né immagazzina energia. Tuttavia, per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni e delle correnti. Il lettore verifichi questa affermazione (consideri, ad esempio, il circuito che si ottiene collegando a una porta del giratore un generatore ideale di tensione e all'altra porta un resistore lineare).

Il giratore è costituito da elementi attivi. Ad esempio, esso può essere realizzato collegando due generatori di corrente controllati in tensione, così come illustrato in Figura 5.12. Sono disponibili commercialmente, sotto forma di circuiti integrati, dispositivi a semiconduttori che realizzano questo elemento.

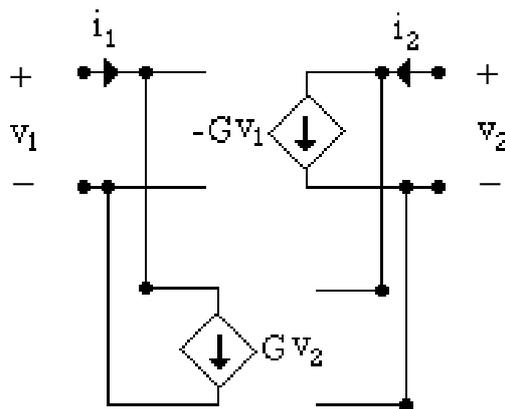


Fig. 5.12 Realizzazione di un giratore attraverso generatori di corrente controllati in tensione.

La proprietà più importante del giratore può essere illustrata considerando il circuito illustrato Figura 5.11b: alla porta “2” del giratore è connesso un condensatore lineare tempo-invariante con capacità C . In questo caso si ha

$$v_1 = -\frac{i_2}{G} = \frac{C}{G} \frac{dv_2}{dt} = \frac{C}{G^2} \frac{di_1}{dt}. \quad (45)$$

Quando alla porta di un giratore è collegato un condensatore lineare e tempo invariante di capacità C , l'altra porta si comporta come se fosse un induttore lineare e tempo invariante di induttanza C/G^2 . Pertanto, il giratore consente di realizzare un bipolo induttore a partire da un condensatore. Vale anche la proprietà duale: tramite un giratore è possibile realizzare un bipolo condensatore a partire da un induttore.

Osservazione

Abbiamo già accennato al fatto che uno stesso bipolo può descrivere il funzionamento di oggetti completamente diversi dal punto di vista fisico. Infatti, il bipolo induttore descrive sia il funzionamento del componente fisico induttore realizzato tramite un avvolgimento, come descritto nel Capitolo 1, sia il funzionamento del bipolo di Figura 5.11b.

◆

Il lettore dimostri che se in uscita al giratore è connesso un resistore lineare di resistenza R allora la porta di ingresso si comporta come un resistore lineare di resistenza $1/RG^2$. Inoltre, il lettore dimostri che se in uscita al giratore è collegato un bipolo controllato in tensione (corrente), allora la porta di ingresso si comporta come se fosse un resistore controllato in corrente (tensione).

5.5 Trasformatore ideale

Il *trasformatore ideale* è un doppio bipolo lineare il cui funzionamento è descritto dalle seguenti relazioni

$$v_1 = nv_2, \quad (44)$$

$$i_2 = -ni_1; \quad (45)$$

la costante positiva n è detta rapporto di trasformazione. Il simbolo del trasformatore è illustrato in Figura 5.13a.

La potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento, quindi è un doppio bipolo globalmente passivo che non dissipa e né immagazzina energia. Per questo doppio bipolo non vale la non amplificazione delle tensioni e delle intensità corrente pur essendo globalmente passivo. Se in un circuito è presente un trasformatore ideale continua a valere la sovrapposizione degli effetti.

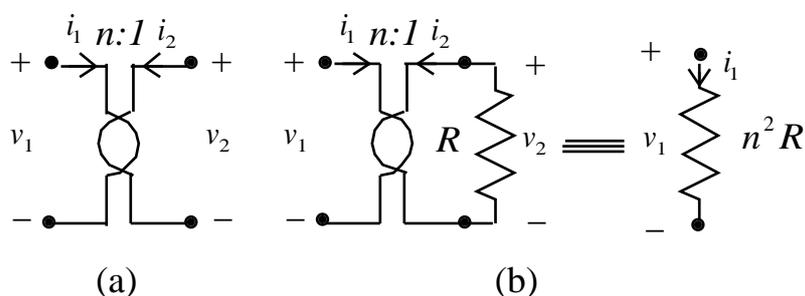


Fig. 5.13 (a) Simbolo del trasformatore ideale; (b) trasformatore terminato con un resistore.

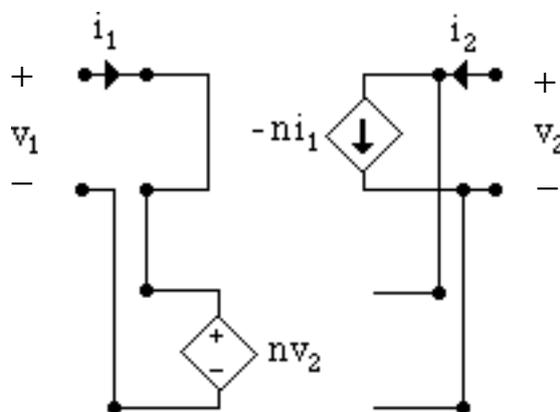


Fig. 5.14 Realizzazione di un trasformatore ideale attraverso generatori controllati.

La proprietà più importante del trasformatore può essere illustrata considerando il circuito di Figura 5.13b (alla porta “2” del trasformatore è connesso un resistore lineare con resistenza R). In questo caso si ha

$$v_1 = nv_2 = -nRi_2 = n^2 Ri_1. \quad (46)$$

Quando alla porta “2” del trasformatore ideale è collegato un resistore lineare di resistenza R , la porta “1” si comporta come se fosse un resistore lineare di resistenza $n^2 R$ (n è adimensionale). Pertanto il trasformatore consente di variare la resistenza di un resistore senza alterarne la costituzione fisica.

Il lettore dimostri che, quando alla porta “2” è collegato un induttore lineare di induttanza L (condensatore lineare di capacità C), la porta “1” si comporta come se fosse un induttore di induttanza $n^2 L$ (condensatore di capacità C/n^2).

Un trasformatore ideale può essere realizzato attraverso un generatore di corrente controllato in corrente e un generatore di tensione controllato in tensione, così come illustrato in Figura 5.15.

5.5.1 Adattamento in potenza

Si consideri il circuito illustrato in Figura 5.15. La tensione E e la resistenza R_i sono fissate. Si valuti il valore della resistenza R_u che rende massima la potenza assorbita dal resistore.

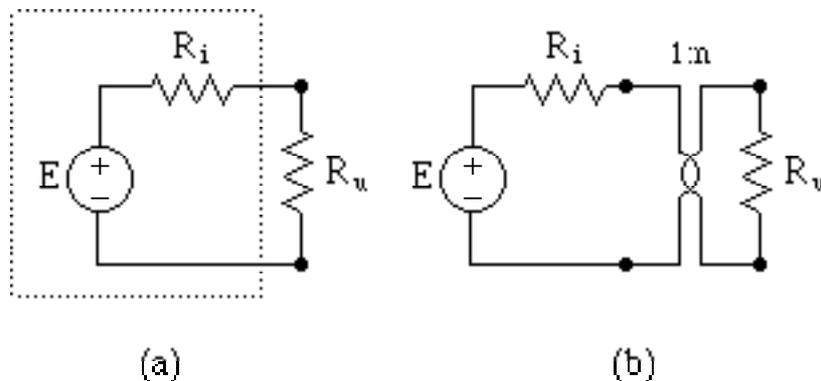


Fig. 5.15 Adattamento in potenza attraverso un trasformatore ideale.

La potenza p_u assorbita dal resistore di resistenza R_u vale

$$p_u(R_u/R_i) = \frac{E^2}{R_i} \frac{R_u/R_i}{(1 + R_u/R_i)^2}. \quad (47)$$

Il massimo della funzione $p_u = p_u(R_u/R_i)$ si ha per $R_u/R_i = 1$ e vale $E^2/4R_i$. Dunque, la potenza p_u assorbita dal resistore di resistenza R_u è massima quando

$$R_u = R_i. \quad (48)$$

Il generatore di tensione E in serie con il resistore di resistenza R_i potrebbe rappresentare, ad esempio, il circuito equivalente secondo Thévenin (con tensione a vuoto E e resistenza interna R_i) di un amplificatore di potenza. Il resistore di resistenza R_u potrebbe rappresentare la “resistenza equivalente” di un utilizzatore (ad esempio un altoparlante). Al fine di massimizzare la potenza assorbita dall'utilizzatore (ad esempio, la potenza del segnale sonoro irradiato dall'altoparlante) bisognerebbe realizzare la condizione (32). Molto spesso essa non può essere realizzata a causa della costituzione fisica dei due sistemi. Cosa è possibile fare in questi casi? È evidente che serve a poco aggiungere un altro resistore in serie (la potenza assorbita in più sarebbe in parte dissipata dal resistore che viene aggiunto in serie).

È possibile modificare la resistenza dell'utilizzatore senza alterarne la costituzione fisica e senza “dissipare” potenza utilizzando un trasformatore ideale. Si interponga tra il generatore reale di tensione e l'utilizzatore (ad esempio, tra l'amplificatore e l'altoparlante) un trasformatore ideale così come illustrato in Figura 5.15. In questo caso la potenza assorbita dal resistore R_u (la resistenza equivalente alla porta “1” vale R_u/n^2 e la potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero) vale

$$p_u(R_u/n^2 R_i) = \frac{E^2}{R_i} \frac{R_u/n^2 R_i}{(1 + R_u/n^2 R_i)^2}, \quad (49)$$

ed è massima se

$$n = \sqrt{\frac{R_u}{R_i}}. \quad (50)$$

Tipicamente è $R_u > R_i$, quindi c'è bisogno di un trasformatore con $n > 1$.

5.6 Doppi bipoli di resistori lineari

In questo paragrafo, esamineremo i doppi bipoli costituiti da elementi lineari dinamici: ad esempio, da resistori lineari, generatori controllati lineari,

giratori, trasformatori ideali. Nel Capitolo 5 prenderemo in considerazione i doppi bipoli lineari e passivi costituiti anche da elementi dinamici lineari, come induttori e condensatori, oltre che da elementi adinamici, in un regime di funzionamento particolare, quello sinusoidale.

In generale, le equazioni caratteristiche dei doppi bipoli adinamici lineari, che non contengono generatori ideali, sono descritte da equazioni algebriche lineari e omogenee. Esse possono essere scritte in molte forme diverse, a seconda di quali grandezze si considerano come variabili indipendenti (le cosiddette *grandezze di controllo*), dando origine a diverse rappresentazioni del doppio bipolo:

- (a) rappresentazione su *base corrente*: le correnti i_1 e i_2 sono le variabili indipendenti e le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili dipendenti, Figura 5.16;
- (b) rappresentazione su *base tensione*: le tensioni v_1 e v_2 sono le variabili indipendenti e le correnti i_1 e i_2 sono le variabili dipendenti, Figura 5.16;
- (c) rappresentazione *ibrida*: la tensione v_1 e la corrente i_2 sono le variabili indipendenti e la corrente i_1 e la tensione v_2 sono le variabili dipendenti o il duale, Figura 5.16;
- (d) rappresentazione di *trasmissione*: la tensione v_1 e la corrente i_1 sono le variabili indipendenti e la tensione v_2 e la corrente i_2 sono le variabili dipendenti o il duale, Figura 5.16;



Fig. 5.16 Doppio bipolo di elementi adinamici lineari.

5.6.1 Matrice delle resistenze e proprietà

Nella rappresentazione in base corrente di un doppio bipolo lineare (senza generatori indipendenti) le tensioni v_1 e v_2 vengono espresse in funzione delle correnti i_1 e i_2 attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2, \quad (51)$$

$$v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2. \quad (52)$$

I coefficienti R_{11} , R_{12} , R_{21} e R_{22} sono delle costanti dimensionalmente omogenee con una resistenza.

Il doppio bipolo controllato in corrente può essere pensato come un doppio bipolo alimentato da due generatori ideali di corrente, Figura 5.17. La linearità delle relazioni (51) e (52) è conseguenza della linearità degli elementi che costituiscono il doppio bipolo. Siccome il circuito è lineare, per la proprietà della sovrapposizione degli effetti ci si aspetta che la tensione di ciascuna porta sia una combinazione lineare delle correnti impresse dai due generatori ideali. L'omogeneità delle equazioni (51) e (52) è conseguenza del fatto che, per ipotesi, il doppio bipolo non contiene al suo interno generatori indipendenti¹. Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (51) e (52). Questi termini rappresentano le tensioni a vuoto alla porta "1" e alla porta "2" prodotte dai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.



Fig. 5.17 Caratterizzazione di un doppio bipolo su base corrente.

I parametri R_{11} , R_{12} , R_{21} e R_{22} del doppio bipolo possono essere determinati attraverso le due prove in circuito aperto illustrate in Figura 5.18. I coefficienti R_{11} e R_{22} , sono le due *resistenze proprie* del doppio bipolo: R_{11} è la resistenza equivalente alla porta "1" quando la porta "2" è connessa a un circuito aperto,

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{v_{11}}{i_1}; \quad (53)$$

R_{22} è la resistenza equivalente alla porta "2" quando la porta "1" è connessa a un circuito aperto,

¹ Quando il doppio bipolo contiene generatori controllati potrebbe accadere che le tensioni alle due porte siano diverse da zero anche se le due correnti sono entrambe nulle. In realtà, qualora ciò si verificasse, il circuito ammetterebbe infinite soluzioni. Per determinare quale si realizza nel "circuito fisico" bisognerebbe portare in conto gli effetti che sono stati ignorati in fase di modello, ad esempio gli effetti dovuti alle non linearità sempre presenti si hanno componenti modellati attraverso generatori controllati.

$$R_{22} = \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{v_{22}}{i_2}. \quad (54)$$

I coefficienti R_{12} e R_{21} , sono le due *resistenze mutue* del doppio bipolo: R_{12} è il rapporto tra la tensione v_{12} della porta “1” quando essa è connessa a un circuito aperto e l’intensità della corrente i_2 (circuito C_2 Figura 5.18),

$$R_{12} = \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{v_{12}}{i_2}; \quad (55)$$

invece, R_{21} è il rapporto tra la tensione v_{21} della porta “2” quando essa è connessa a un circuito aperto e l’intensità della corrente i_1 , (circuito C_1 Figura 5.18),

$$R_{21} = \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{v_{21}}{i_1}. \quad (56)$$

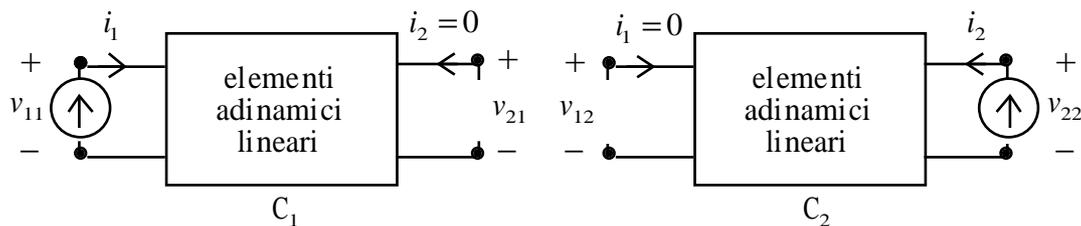


Fig. 5.18 Due prove in circuito aperto per identificare i parametri \mathbf{R} .

Le relazioni caratteristiche (51) e (52) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, le (51) e (52) possono essere riscritte come

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}, \quad (57)$$

dove \mathbf{R} è la matrice quadrata 2×2 data da

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Alla matrice \mathbf{R} si dà il nome di *matrice delle resistenze* del doppio bipolo. La potenza assorbita dal doppio bipolo vale

$$p = i_1 v_1 + i_2 v_2 = \mathbf{v}^T \mathbf{i}. \quad (59)$$

Utilizzando la (57), si ha

$$p = \mathbf{i}^T \mathbf{R} \mathbf{i}. \quad (60)$$

Proprietà della matrice delle resistenze

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le seguenti proprietà

$$R_{11} > 0, R_{22} > 0, |R_{21}| \leq R_{11}, |R_{12}| \leq R_{22}. \quad (61)$$

Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che R_{11} e R_{22} sono resistenze proprie, mentre le ultime due sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle.

Nel circuito C_1 di Figura 5.18 è possibile considerare l'intensità della corrente i_1 impressa dal generatore di corrente come "causa" e la tensione v_{21} della porta collegata al circuito aperto come "effetto". Dualmente, nel circuito C_2 di Figura 5.18 è possibile considerare l'intensità della corrente i_2 impressa dal generatore di corrente come "causa" e la tensione v_{12} della porta collegata al circuito aperto come "effetto". Il doppio bipolo si dice che è *reciproco* se il rapporto tra effetto e causa nel circuito C_1 , cioè v_{21}/i_1 , è uguale al rapporto tra effetto e causa nel circuito C_2 , cioè v_{12}/i_2 . In altre parole, un doppio bipolo si dice reciproco se il rapporto tra effetto e causa resta lo stesso malgrado lo scambio tra la causa e l'effetto.

Quali doppi bipoli sono reciproci? I doppi bipoli composti da resistori lineari e trasformatori ideali sono reciproci. La dimostrazione di questa proprietà si basa sul Teorema di Tellegen e viene riportata nel paragrafo successivo (§ 5.8). La proprietà della reciprocità può non valere se il doppio bipolo contiene giratori e generatori controllati.

Per un doppio bipolo reciproco si ottiene, utilizzando le (55) e (56) e la condizione $v_{21}/i_1 = v_{12}/i_2$,

$$R_{12} = R_{21}. \quad (62)$$

In conclusione, le matrici delle resistenze dei doppi bipoli composti da resistori e trasformatori ideali sono simmetriche.

Esercizio

Si consideri il doppio bipolo di resistori lineari di Figura 5.19. Vogliamo determinare la matrice delle resistenze.

Dalla Figura 5.19 e dalle formule (53) e (54) risulta evidente che R_{11} e R_{22} sono le resistenze equivalenti dei due bipoli riportati in Figura 5.20.

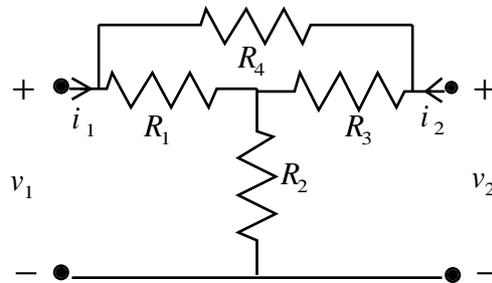


Fig. 5.19 Un doppio bipolo di resistori.

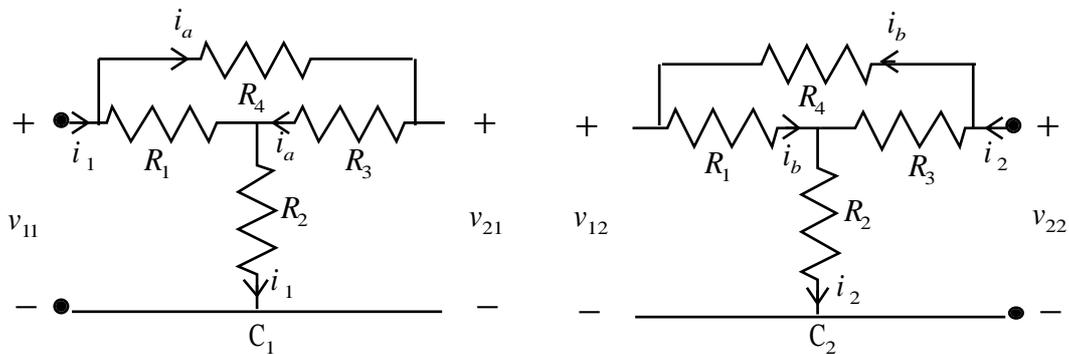


Fig. 5.20 Due circuiti ausiliari per la determinazione della matrice delle resistenze.

Nel circuito C_1 i resistori R_3 e R_4 sono in serie (ricordiamo che questo circuito è stato ottenuto ponendo uguale a zero la corrente $i_2 = 0$, di conseguenza le intensità di corrente dei due resistori R_3 e R_4 sono uguali, con un'opportuna scelta dei versi di riferimento). A sua volta la serie R_3 - R_4 è in parallelo con il resistore R_1 e il risultante gruppo di resistenze è in serie con il resistore R_2 . Sicché R_{11} è data da

$$R_{11} = R_2 + \frac{(R_3 + R_4)R_1}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (63)$$

Invece, nel circuito C_2 i resistori R_1 e R_4 sono in serie (ricordiamo che questo circuito è stato ottenuto ponendo uguale a zero la corrente $i_1 = 0$, di conseguenza le correnti nei due resistori R_1 e R_4 sono uguali, con un'opportuna scelta dei versi di riferimento). A sua volta la serie $R_1 - R_4$ è in parallelo con il resistore R_3 e il risultante gruppo di resistenze è in serie con il resistore R_2 . Sicché R_{22} è data da

$$R_{22} = R_2 + \frac{(R_1 + R_4)R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (64)$$

Per determinare R_{12} bisogna usare l'equazione (55), quindi bisogna determinare v_{12} nel circuito C_2 . In questo caso è chiaro che

$$v_{12} = i_b R_1 + i_2 R_2. \quad (65)$$

Siccome la serie $R_1 - R_4$ è in parallelo con il resistore R_3 , la corrente i_b può essere determinata applicando il partitore di corrente. Troviamo

$$i_a = i_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (66)$$

Sostituendo la (66) nella (65) e dividendo tutto per i_2 troviamo

$$R_{12} = R_2 + R_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4}. \quad (67)$$

Il lettore determini il parametro R_{21} procedendo in modo analogo e verifichi che è uguale a R_{12} a causa della proprietà della reciprocità.

◆

5.6.2 Matrice delle conduttanze e proprietà

Nella rappresentazione in base tensione di un doppio bipolo lineare (senza generatori indipendenti) le correnti i_1 e i_2 vengono espresse in funzione delle tensioni v_1 e v_2 come funzioni lineari omogenee

$$i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2, \quad (68)$$

$$i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2. \quad (69)$$

I coefficienti G_{11} , G_{12} , G_{21} e G_{22} sono delle costanti dimensionalmente omogenee con una conduttanza.

Il doppio bipolo controllato in tensione può essere visto come un doppio bipolo alimentato da due generatori ideali di tensione.

Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (68) e (69). Questi termini rappresentano le correnti di corto circuito alla porta "1" e alla porta "2" dovute ai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.

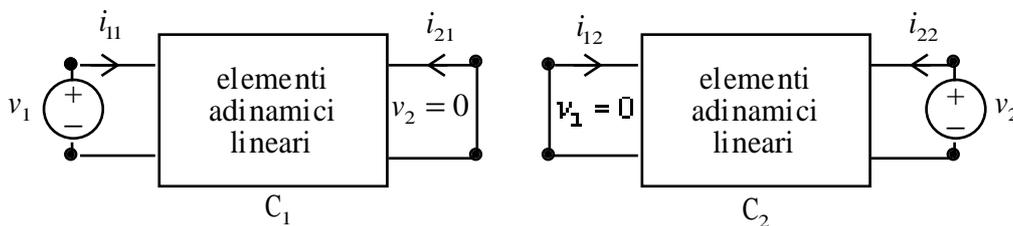


Fig. 5.21 Due prove in corto circuito per identificare i parametri G .

Per determinare i coefficienti G_{11} , G_{12} , G_{21} e G_{22} possiamo usare le due prove di corto circuito riportate in Figura 5.21. I coefficienti G_{11} e G_{22} sono le due *conduttanze proprie* del doppio bipolo:

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{11}}{v_1}, \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_{22}}{v_2}. \quad (70)$$

I coefficienti G_{12} e G_{21} sono le due *conduttanze mutue* del doppio bipolo:

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{i_{12}}{v_2}, \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{21}}{v_1}. \quad (71)$$

Le relazioni caratteristiche (68) e (69) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ e $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^T$, le (68) e (69) possono essere riscritte come

$$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}, \quad (72)$$

dove \mathbf{G} è la matrice quadrata 2×2 data da

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Alla matrice \mathbf{G} si dà il nome di *matrice delle conduttanze* del doppio bipolo. È immediato che la matrice delle resistenze e la matrice delle conduttanze sono legate dalle relazioni

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}. \quad (74)$$

La potenza assorbita dal doppio bipolo può essere espressa come

$$p = \mathbf{v}^T \mathbf{G} \mathbf{v}. \quad (75)$$

Esercizio

Il lettore determini le relazioni esplicite tra gli elementi della matrice delle conduttanze e gli elementi della matrice delle resistenze.



Proprietà della matrice delle conduttanze

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le proprietà

$$G_{11} > 0, \quad G_{22} > 0, \quad |G_{21}| \leq G_{11}, \quad |G_{12}| \leq G_{22}. \quad (76)$$

Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che G_{11} e G_{22} sono conduttanze proprie, mentre le ultime due sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti. Il lettore provi a dimostrarle.

Per questa caratterizzazione vale una proprietà di reciprocità analoga a quella introdotta per la precedente caratterizzazione. Nel circuito C_1 di Figura 5.21 si consideri, questa volta, la tensione v_1 come “causa” e l’intensità di corrente i_{21} come “effetto”. Dualmente, nel circuito C_2 si consideri la tensione v_2 come “causa” e l’intensità di corrente i_{12} come “effetto”. Se il doppio bipolo è reciproco, nel senso illustrato precedentemente, il rapporto tra effetto e causa nel circuito C_1 (di Figura 5.21), cioè i_{21}/v_1 , è uguale al rapporto tra effetto e causa nel circuito C_2 (di Figura 5.21), cioè i_{12}/v_2 e, quindi

$$G_{12} = G_{21}. \quad (77)$$

Il lettore può verificare questa proprietà, a partire dalla relazione (62), attraverso le relazioni che esprimono gli elementi della matrice delle conduttanze in funzione degli elementi della matrice delle resistenze. Anche questa proprietà può essere dimostrata, direttamente, applicando il teorema di Tellegen (vedi § 5.8). In conclusione, le matrici delle conduttanze dei doppi bipoli composti da resistori lineari e trasformatori ideali sono simmetriche.

Esercizio

Si determini la matrice delle conduttanze del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 5.19 risolvendo i corrispondenti circuiti di prova in corto circuito e si verifichino le proprietà (76) e (77). Si verifichi, poi, che la matrice così ottenuta è l’inversa della matrice delle resistenze calcolata in precedenza.



5.6.3 Matrice ibrida e proprietà

Nella rappresentazione ibrida di un doppio bipolo lineare (senza generatori indipendenti) la tensione v_1 e la corrente i_2 vengono espresse in funzione della corrente i_1 e della tensione v_2 (o viceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2, \quad (78)$$

$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2. \quad (79)$$

Il coefficiente H_{11} è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, il coefficiente H_{22} è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza e i due coefficienti H_{12} e H_{21} sono costanti adimensionali.

Un doppio bipolo caratterizzato in modo ibrido può essere visto come un doppio bipolo alimentato da un generatore di corrente ideale alla porta “1” e da un generatore di tensione alla porta “2”.

Qualora il doppio bipolo contenesse anche generatori indipendenti, bisognerebbe aggiungere due termini noti alle espressioni a secondo membro nelle (78) e (79). Questi termini rappresentano, rispettivamente, la tensione a vuoto alla porta “1” e la corrente di corto circuito alla porta “2” dovute ai generatori indipendenti interni al doppio bipolo.

Per trovare i parametri H possiamo fare riferimento ai due circuiti riportati in Figura 5.22. Nel circuito C_1 la porta “2” è connessa a un cortocircuito, $v_2 = 0$, mentre nel circuito C_2 la porta “1” è collegata a un circuito aperto, $i_1 = 0$. Il coefficiente H_{11} è la resistenza equivalente alla porta “1” quando la porta “2” è in corto circuito,

$$H_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{v_{11}}{i_1}; \quad (80)$$

il coefficiente H_{22} è la conduttanza equivalente alla porta “2” con la porta “1” aperta,

$$H_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{i_{22}}{v_2}; \quad (81)$$

il coefficiente H_{12} è il *guadagno di tensione* con la porta “1” aperta,

$$H_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{v_{12}}{v_2}; \quad (82)$$

infine, il coefficiente H_{21} è il *guadagno di corrente* con la porta “2” in corto circuito,

$$H_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = \frac{i_{21}}{i_1}. \quad (83)$$

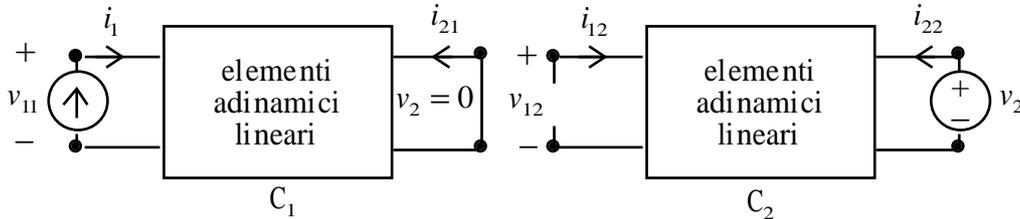


Fig. 5.22 Due circuiti ausiliari per l'identificazione dei parametri H .

Le relazioni caratteristiche (78) e (79) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna $\mathbf{x} = (i_1, v_2)^T$ e $\mathbf{y} = (v_{11}, i_2)^T$, le (78) e (79) possono essere riscritte come

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (84)$$

dove \mathbf{H} è la matrice quadrata 2×2 data da

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Alla matrice \mathbf{H} si dà il nome di *matrice ibrida* del doppio bipolo. La potenza assorbita dal doppio bipolo può essere espressa come

$$p = \mathbf{y}^T \mathbf{H}\mathbf{x}. \quad (86)$$

Esercizio

Si determini la matrice ibrida del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 5.19 risolvendo i corrispondenti circuiti ausiliari.

◆

Proprietà della matrice ibrida

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le proprietà

$$H_{11} > 0, H_{22} > 0, |H_{21}| = |H_{12}| \leq 1. \quad (87)$$

Le prime due sono diretta conseguenza del fatto che H_{11} e H_{22} sono, rispettivamente, una resistenza propria e una conduttanza propria, mentre l'ultima è una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti e delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle.

Come si estende la proprietà di reciprocità a questa caratterizzazione? Nel circuito C_1 di Figura 5.22 si consideri l'intensità di corrente i_1 come "causa" e l'intensità di corrente i_{21} come "effetto". Invece, nel circuito C_2 si consideri la tensione v_2 come "causa" e la tensione v_{12} come "effetto" (come nel circuito C_2 di Figura 5.18). Se il doppio bipolo è reciproco, nel senso illustrato nel § 6.3.1, si ha che il rapporto tra effetto e causa nel circuito C_1 , cioè i_{21}/i_1 , è uguale, questa volta, al rapporto tra effetto e causa nel circuito C_2 cambiato di segno, cioè $-v_{12}/v_2$ e, quindi

$$H_{12} = -H_{21}. \quad (88)$$

Il lettore può verificare questa proprietà, a partire dalla relazione (62), attraverso le relazioni che esprimono gli elementi della matrice ibrida in funzione degli elementi della matrice delle resistenze. Anche questa proprietà può essere dimostrata, direttamente, applicando il teorema di Tellegen (vedi § 5.8). In conclusione, le matrici ibride dei doppi bipoli composti da resistori lineari e trasformatori ideali sono antisimmetriche.

Esercizio

Si determini la relazione tra gli elementi della matrice ibrida e gli elementi della matrice delle conduttanze di un doppio bipolo. Si verifichi, poi, che per un doppio bipolo reciproco vale la relazione (88).



5.6.4 Matrice di trasmissione e proprietà

Nella *rappresentazione di trasmissione* di un doppio bipolo lineare (senza generatori indipendenti) la tensione v_1 e la corrente i_1 vengono espresse in funzione della tensione v_2 e della corrente $-i_2$ (o viceversa) attraverso le relazioni lineari omogenee

$$v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2), \quad (89)$$

$$i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2). \quad (90)$$

I coefficiente T_{11} e T_{22} sono due costanti adimensionali. Il coefficiente T_{12} è una costante dimensionalmente omogenea con una resistenza, mentre il coefficiente T_{21} è una costante dimensionalmente omogenea con una conduttanza. Questa rappresentazione, chiamata anche *rappresentazione ABCD*, è molto utile nell'analisi di cascate di doppi bipoli.

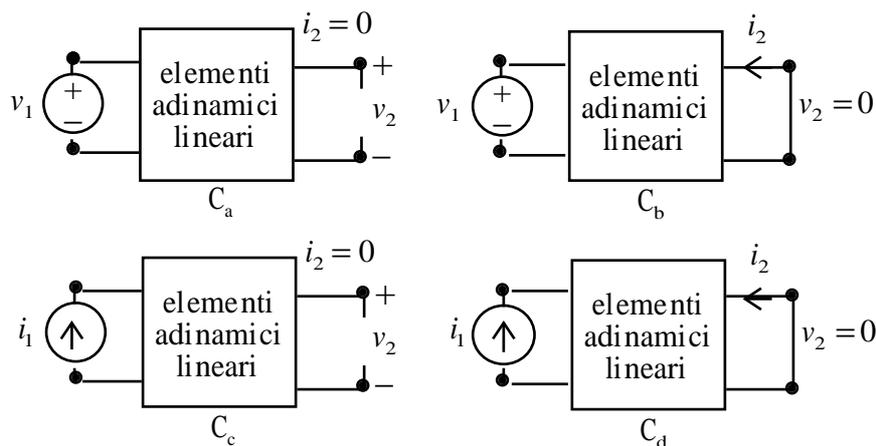


Fig. 5.23 Circuiti ausiliari per l'identificazione dei parametri T .

Dalle relazioni (89) e (90) si ha che

$$T_{11} = \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_2=0}, \quad T_{12} = \frac{v_1}{-i_2} \Big|_{v_2=0}, \quad T_{21} = \frac{i_1}{v_2} \Big|_{i_2=0}, \quad T_{22} = \frac{i_1}{-i_2} \Big|_{v_2=0}. \quad (91)$$

Per trovare questi parametri possiamo fare riferimento ai quattro circuiti riportati in Figura 5.23.

Le relazioni caratteristiche (89) e (90) possono essere rappresentate in forma matriciale. Introdotti i due vettori colonna $x_2 = (v_2, -i_2)^T$ e $x_1 = (v_1, i_1)^T$, le (89) e (90) possono essere riscritte come

$$x_2 = T x_1, \quad (92)$$

dove T è la matrice quadrata 2×2 data da

$$T = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}. \quad (93)$$

Alla matrice T si dà il nome di *matrice di trasmissione* del doppio bipolo.

Proprietà della matrice di trasmissione

Per i doppi bipoli di resistori passivi (resistori con resistenze positive) si hanno le seguenti proprietà

$$|T_{11}| \leq 1, \quad |T_{22}| \leq 1. \quad (94)$$

Queste proprietà sono una diretta conseguenza della proprietà della non amplificazione delle correnti e delle tensioni. Il lettore provi a dimostrarle.

Come si estende la proprietà di reciprocità a questa caratterizzazione? E' evidente che, essendo T_{12} e T_{21} dimensionalmente non omogenei, non può essere nè $T_{12} = T_{21}$, nè $T_{12} = -T_{21}$. Se il doppio bipolo è reciproco si ha, invece,

$$\det(T) = 1. \quad (95)$$

Il lettore può verificare questa proprietà, a partire dalla relazione (62), attraverso le relazioni che esprimono gli elementi della matrice di trasmissione in funzione degli elementi della matrice delle resistenze.

Esercizi

Si determini la relazione tra gli elementi della matrice di trasmissione e gli elementi della matrice delle conduttanze di un doppio bipolo.

Si determinino, poi, i parametri T del doppio bipolo di resistori riportato in Figura 5.19 risolvendo i corrispondenti circuiti ausiliari.

5.6.5 Doppi bipoli in cascata

Consideriamo, ora, due doppi bipoli in cascata, come nella Figura 5.25. Siano T' e T'' le rispettive matrici di trasmissione. Intendiamo trovare la matrice di trasmissione T per il doppio bipolo equivalente alla cascata.

Siccome per la natura stessa della connessione abbiamo

$$v_1'' = v_2', \quad i_1'' = -i_2', \quad (96)$$

utilizzando la definizione di matrice di trasmissione si ha che

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ i_1' \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} v_2' \\ -i_2' \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} v_1'' \\ i_1'' \end{bmatrix} = T' T'' \begin{bmatrix} v_2'' \\ -i_2'' \end{bmatrix}, \quad (97)$$

quindi

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ i_1' \end{bmatrix} = T' T'' \begin{bmatrix} v_2'' \\ -i_2'' \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Pertanto, la matrice di trasmissione della cascata di due doppi bipoli con matrici di trasmissione T' e T'' è data da

$$T = T' T''. \quad (99)$$

La rappresentazione duale in cui le grandezze indipendenti sono la tensione v_1 e la corrente i_1 è possibile. Per essa valgono tutti le considerazioni e i risultati che abbiamo appena descritto.

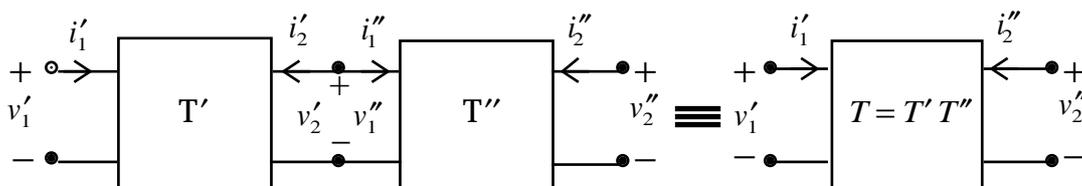


Fig. 5.24 Due doppi bipoli connessi in cascata.

5.7 Sintesi di un doppio bipolo resistivo lineare

Nel paragrafo precedente abbiamo analizzato circuiti resistivi lineari che si comportano come doppi bipoli. È interessante a questo punto considerare il problema inverso. Dato un doppio bipolo, definito, ad esempio, attraverso la matrice delle resistenze (o conduttanze), vogliamo individuare il circuito resistivo lineare più semplice che abbia la matrice delle resistenze assegnata. È evidente che in questo modo possiamo estendere il concetto di equivalenza a strutture più complesse del semplice bipolo.

Per risolvere questo problema dobbiamo distinguere i casi in cui la matrice delle resistenze (o conduttanze) è simmetrica dai casi in cui non lo è.

Si assuma che la matrice delle resistenze (o delle conduttanze) sia simmetrica. In questi casi la matrice delle resistenze (o conduttanze) è caratterizzata da tre parametri indipendenti, di conseguenza bastano tre resistori per costruire il doppio bipolo di resistori equivalente.

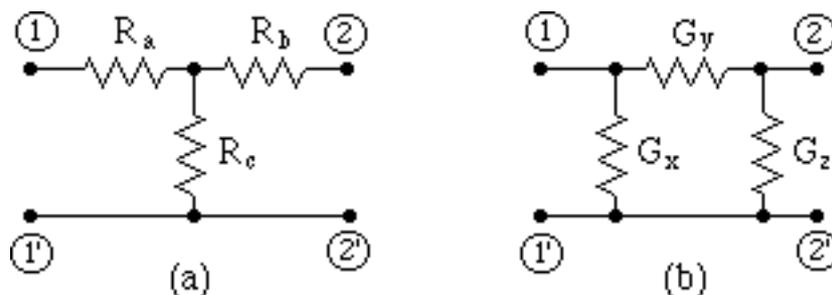


Fig. 5.25 (a) Configurazione a “T”, (b) configurazione a “Π”.

Il circuito equivalente di un doppio bipolo di soli resistori lineari può essere costruito considerando un doppio bipolo del tipo illustrato in Figura 5.25: alla configurazione rappresentata in Figura 5.25a si dà il nome di configurazione a “T”, invece a quella rappresentata in Figura 5.25b si dà il nome di configurazione a “Π”. Conviene rappresentare la matrice delle resistenze tramite la configurazione a “T” e la matrice delle conduttanze tramite la configurazione a “Π”.

5.7.1 Configurazione a “T”

Gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo di Figura 5.25a sono

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0} = R_a + R_c, \quad (100)$$

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = R_b + R_c, \quad (101)$$

$$R_{21} = R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1 = 0} = R_c. \quad (102)$$

Allora, le resistenze dei resistori della configurazione a “T” che sintetizza una data matrice delle resistenze, che sia simmetrica, sono date dalle espressioni

$$R_a = R_{11} - R_{12}, \quad (103)$$

$$R_b = R_{22} - R_{12}, \quad (104)$$

$$R_c = R_{12}. \quad (105)$$

Si osservi che, affinché una assegnata matrice delle resistenze sia fisicamente realizzabile con resistori aventi resistenze positive (resistori passivi), devono essere verificate le condizioni (62). Il segno degli elementi fuori diagonale può essere qualsiasi. Se R_{12} è negativo, bisogna invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una resistenza R_c positiva.

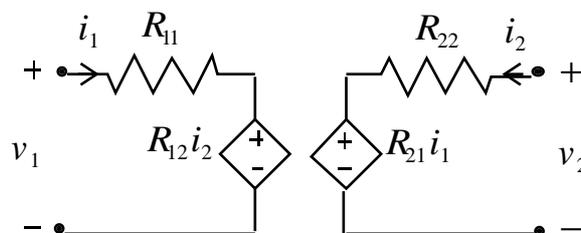


Fig. 5.26 Realizzazione di un doppio bipolo non reciproco attraverso due generatori di tensione controllati in corrente.

Osservazione

Una matrice delle resistenze che non è simmetrica e/o non verifica le condizioni (62), non può essere sintetizzata con un doppio bipolo di soli resistori. In questi casi è necessario utilizzare, oltre ai resistori, anche generatori controllati per

realizzare il doppio bipolo corrispondente alla matrice assegnata. In Figura 5.26 è riportata la configurazione più generale attraverso cui è possibile sintetizzare una matrice delle resistenze.

◆

I parametri ibridi della configurazione a “T” sono:

$$H_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0} = (R_a + R_c)^{-1}, \quad (106)$$

$$H_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0} = R_b + \frac{R_a R_c}{R_a + R_c}, \quad (107)$$

$$-H_{12} = H_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} = \frac{R_c}{R_a + R_c}. \quad (108)$$

5.7.2 Configurazione a “Π”

Per il doppio bipolo di Figura 5.25b si ottiene la matrice delle conduttanze

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = G_x + G_y, \quad (109)$$

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = G_y + G_z, \quad (110)$$

$$G_{21} = G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = -G_y. \quad (111)$$

Allora, le resistenze dei resistori della configurazione a “Π” che sintetizza una data matrice delle conduttanze, che sia simmetrica, sono date da

$$G_x = G_{11} + G_{12}, \quad (112)$$

$$G_y = -G_{12}, \quad (113)$$

$$G_z = G_{22} + G_{12}. \quad (114)$$

Si osservi che, affinché una assegnata matrice delle conduttanze sia fisicamente realizzabile con resistori aventi resistenze positive (resistori passivi), devono essere verificate le condizioni (77). Il segno degli elementi fuori diagonale può essere qualsiasi. Se G_{12} è negativo, bisogna invertire la coppia di terminali di una delle due porte per ottenere una conduttanza G_y positiva.

Osservazione

Una matrice delle conduttanze che non è simmetrica e/o non verifica le condizioni (61), non può essere sintetizzata con un doppio bipolo di soli resistori. In questi casi è necessario utilizzare, oltre ai resistori, anche generatori controllati per realizzare il doppio bipolo corrispondente alla matrice assegnata. In Figura 5.27 è riportata la configurazione più generale attraverso cui è possibile sintetizzare una matrice delle resistenze.

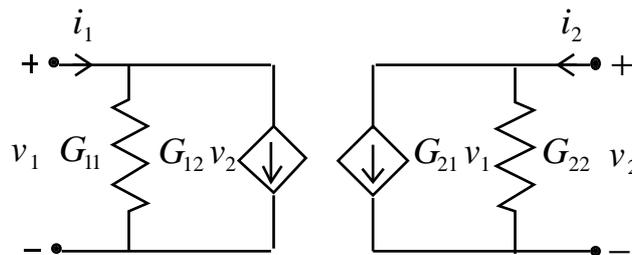


Fig. 5.27 Realizzazione di un doppio bipolo non reciproco attraverso due generatori di corrente controllati in tensione.



5.7.3 Trasformazione stella-triangolo

Si considerino i due tripoli di resistori illustrati in Figura 5.28. Questi sono gli esempi più semplici di tripoli di resistori. In Figura 5.28a i resistori sono connessi in modo tale da ricordare una “stella” (*connessione a stella*), mentre in Figura 5.28b sono connessi in modo tale da ricordare un “triangolo” (*connessione a triangolo*).

Il tripolo costituito da tre resistori connessi a stella (Figura 5.28a) può essere sempre “rappresentato” attraverso un tripolo equivalente in cui i resistori sono connessi a triangolo (Figura 5.28b), e viceversa. Stiamo estendendo il concetto di equivalenza al caso di elementi circuitali con più di due terminali.

Per determinare la relazione di equivalenza tra il tripolo a stella e quello a triangolo si può operare in diversi modi. Ad esempio, ciascun tripolo prima viene caratterizzato come doppio bipolo, determinando, ad esempio, le rispettive matrici delle resistenze e, poi, si impone che esse siano uguali. Il tripolo a stella può essere visto come un doppio bipolo a “T”, mentre il tripolo a triangolo può essere visto come un doppio bipolo a “Π”.

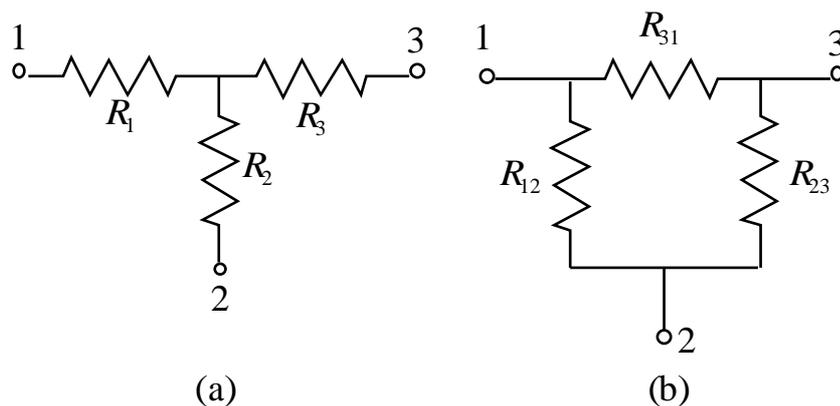


Fig. 5.28 (a) Tre resistori connessi a stella e (b) connessi a triangolo.

Esiste, però, un modo molto più semplice per determinare le relazioni tra le resistenze della configurazione a stella R_1 , R_2 e R_3 e le resistenze della configurazione a triangolo R_{12} , R_{23} e R_{31} equivalente. Esso si basa sull'applicazione diretta della proprietà della sovrapposizione degli effetti. Per determinare il legame tra R_1 , R_2 e R_3 e R_{12} , R_{23} e R_{31} conviene, allo scopo di ridurre la complessità di calcolo, imporre l'equivalenza per delle terne particolari di intensità di corrente. Si imponga l'equivalenza per la terna di intensità di corrente

$$i_1 = I^{(1)}, i_2 = -I^{(1)}, i_3 = 0. \quad (115)$$

Le tensioni v_{31}^s e v_{31}^t valgono (vedi Figure 5.28)

$$v_{31}^s = -R_1 I^{(1)}, \quad (116)$$

$$v_{31}^t = -\frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} I^{(1)}. \quad (117)$$

Imponendo $v_{31}^s = v_{31}^t$, si ottiene la relazione

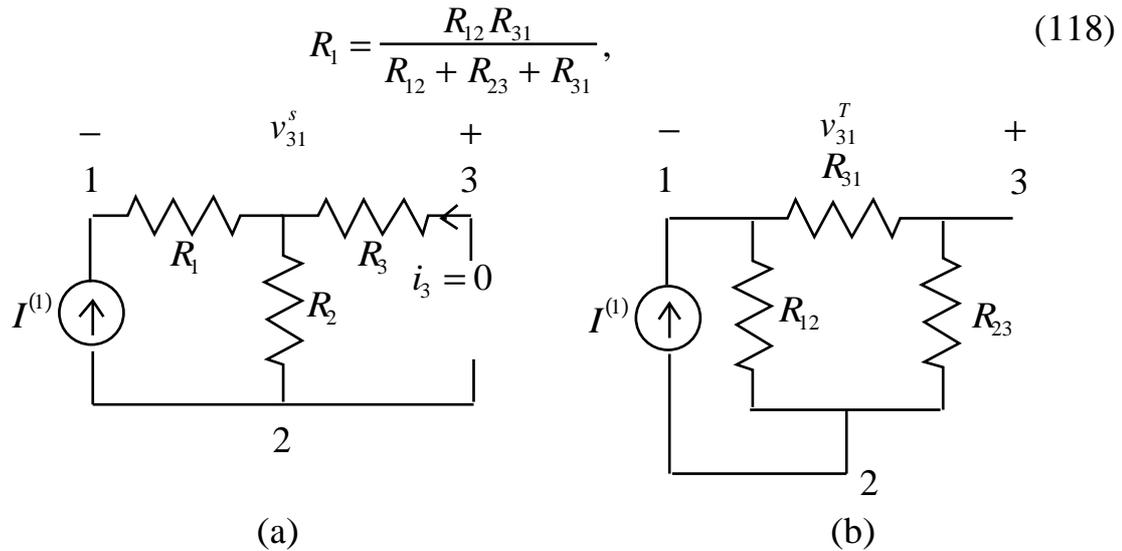


Fig. 5.29 Circuiti ausiliari per determinare le relazioni di equivalenza.

Imponendo, ora, l'equivalenza per le due terne indipendenti

$$i_1 = 0, \quad i_2 = I^{(2)}, \quad i_3 = -I^{(2)}, \quad (119)$$

$$i_1 = I^{(3)}, \quad i_2 = 0, \quad i_3 = -I^{(3)}, \quad (120)$$

si ottengono le altre due relazioni

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (121)$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (122)$$

Il lettore verifichi che, dalle (121) e (122), si ottiene anche $v_{12}^T = v_{12}^S$ e $v_{23}^T = v_{23}^S$. Le relazioni (118), (121) e (122) sono state ottenute imponendo l'equivalenza per tre particolari terne di correnti. Per la proprietà della sovrapposizione degli effetti l'equivalenza è assicurata per qualsiasi altra terna di correnti (il lettore dimostri che è sempre possibile scomporre una terna arbitraria di correnti nella sovrapposizione di tre terne del tipo (115), (119) e (120)).

Formule per la trasformazione triangolo \rightarrow stella

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (123)$$

Formule per la trasformazione stella \rightarrow triangolo

La trasformazione inversa è descritta dalle relazioni

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \quad (124)$$

◆

Si osservi che se $R_{12} = R_{23} = R_{31} \equiv R_T$, allora $R_1 = R_2 = R_3 \equiv R_S = R_T/3$.

Esercizio

Il lettore determini le relazioni (123) e (124) imponendo che la matrice delle conduttanze della configurazione a triangolo e della configurazione a stella siano uguali.

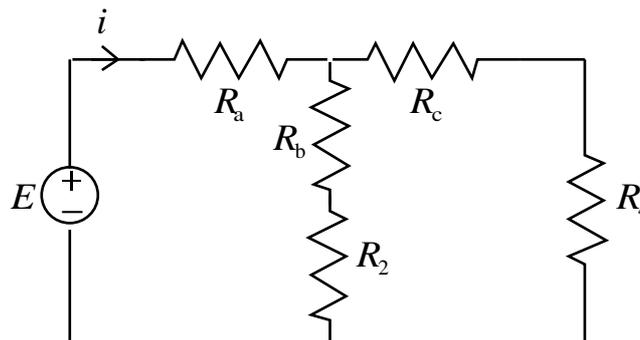


Fig. 5.30 Circuito equivalente al circuito di Figura 3.9.

Esercizio

La soluzione del circuito illustrato nella Figura 3.9 può essere semplificata notevolmente se si sostituisce il triangolo costituito dai resistori di resistenze R_1 , R_2 e R_3 con la stella equivalente R_{12} , R_{23} e R_{31} :

$$R_a = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 1, \quad R_b = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} = 1, \quad R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} = 1. \quad (125)$$

Così facendo si ottiene il circuito equivalente illustrato in Figura 5.30. Esso può essere risolto attraverso l'equivalenza serie e parallelo e le formule dei partitori. Il lettore determini l'intensità della corrente i che attraversa il generatore in questo modo e la confronti con quella ottenuta applicando il metodo dei potenziali di nodo.

5.8 Reciprocità

Si consideri un doppio bipolo di resistori lineari e si colleghi una porta (ad esempio, la porta "1" nello schema di Figura 5.31a) a un generatore ideale di corrente e l'altra porta a un circuito aperto (la porta "2" nello schema di Figura 5.31a). Indichiamo con C_1 il circuito così ottenuto. Si consideri, ora, lo stesso doppio bipolo di resistori lineari e si colleghi la porta "2" a un generatore ideale di corrente e l'altra porta a un circuito aperto (schema di Figura 5.31b). Indichiamo con C_2 il circuito così ottenuto. Indichiamo con N_R il numero di resistori del doppio bipolo e ordiniamo le tensioni e le intensità di corrente in modo tale che v_{k1} e i_{k1} , per $k = 3, 4, \dots, N_R + 2$, siano le variabili elettriche dei resistori del circuito C_1 , e v_{k2} e i_{k2} , per $k = 3, 4, \dots, N_R + 2$, siano le variabili elettriche dei resistori del circuito C_2 .

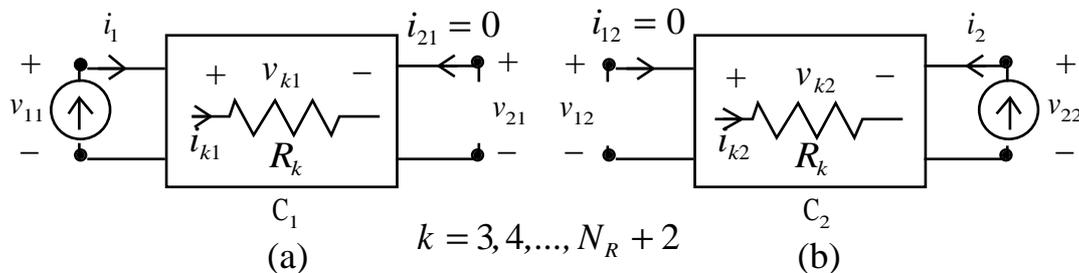


Fig. 5.31

Nel circuito C_1 di Figura 5.31 è possibile considerare l'intensità della corrente i_1 impressa dal generatore di corrente come "causa" e la tensione v_{21} come "effetto". Dualmente, nel circuito C_2 di Figura 5.31b è possibile considerare l'intensità della corrente i_2 impressa dal generatore di corrente come "causa" e la tensione v_{12} come "effetto". Ora, utilizzando il teorema di Tellegen, mostreremo che il rapporto tra effetto e causa nel circuito C_1 , v_{21}/i_1 , e il rapporto tra effetto e causa nel circuito C_2 , v_{12}/i_2 , sono uguali,

$$\frac{v_{21}}{i_1} = \frac{v_{12}}{i_2}. \quad (126)$$

Questa è la proprietà della *reciprocità*. Un doppio bipolo che verifica questa proprietà si dice *reciproco*.

I circuiti C_1 e C_2 , per costruzione, hanno lo stesso grafo, quindi è possibile applicare la conservazione delle potenze virtuali, vedi § 3.11. Si considerino le potenze virtuali ottenute prendendo le intensità di corrente del circuito C_1 e le tensioni del circuito C_2 . Per esse vale l'equazione

$$v_{12}i_1 + \sum_{k=3}^{N_R+2} v_{k2}i_{k1} = 0. \quad (127)$$

La potenza virtuale assorbita dal lato collegato alla porta "2" del doppio bipolo è uguale a zero perché $i_{21} = 0$; la sommatoria rappresenta il contributo dei resistori del doppio bipolo.

Si considerino, ora, le potenze virtuali ottenute prendendo le tensioni del circuito C_1 e le intensità di corrente del circuito C_2 . Per esse si ottiene

$$v_{21}i_2 + \sum_{k=3}^{N_R+2} v_{k1}i_{k2} = 0. \quad (128)$$

In questo caso la potenza virtuale assorbita dal lato collegato alla porta "1" del doppio bipolo è uguale a zero perché $i_{12} = 0$; la sommatoria rappresenta, sempre, il contributo dei resistori del doppio bipolo.

Le due sommatorie nelle equazioni (127) e (128) sono eguali quando i resistori sono lineari. Infatti, essendo

$$v_{k1} = R_k i_{k1} \text{ e } v_{k2} = R_k i_{k2} \text{ per } k = 3, 4, \dots, N_R + 2, \quad (129)$$

si ottiene

$$v_{k1}i_{k2} = R_k i_{k1}i_{k2} \text{ e } v_{k2}i_{k1} = R_k i_{k2}i_{k1}, \quad (130)$$

quindi

$$v_{k1}i_{k2} = v_{k2}i_{k1} \text{ per } k = 3, 4, \dots, N_R + 2. \quad (131)$$

Dalla (131) si ha immediatamente che le sommatorie nelle equazioni (127) e (128) sono uguali, quindi

$$v_{12}i_1 = v_{21}i_2. \quad (132)$$

Questa equazione non è altro che la relazione che volevamo dimostrare, cioè la relazione (126). Ad essa diamo il nome di *prima forma* della proprietà di reciprocità.

Questo risultato continua a valere anche quando il doppio bipolo, oltre a resistori lineari, contiene anche trasformatori ideali. Lasciamo al lettore la dimostrazione di questa estensione.

La proprietà di reciprocità, in generale, non vale se il doppio bipolo contiene anche generatori controllati e giratori (questi elementi circuitali sono non reciproci). Il lettore verifichi questa affermazione.

Osservazione

Si consideri, ora, la situazione in cui: il circuito C_1 è ottenuto collegando alla porta “1” del doppio bipolo di resistori lineari un generatore di tensione, v_1 , e alla porta “2” un cortocircuito, Figura 5.21; il circuito C_2 è ottenuto collegando alla porta “1” del doppio bipolo di resistori lineari un corto circuito e alla porta “2” un generatore di tensione, v_2 , Figura 5.21. Si dimostra, applicando il teorema di Tellegen, che

$$v_1i_{12} = v_2i_{21}. \quad (133)$$

Lasciamo al lettore la dimostrazione. Questa è la *seconda forma* della proprietà di reciprocità. Da essa discende la simmetria della matrice delle conduttanze dei doppi bipoli di resistori lineari e trasformatori ideali.

Si consideri, ora, la situazione in cui: il circuito C_1 è ottenuto collegando alla porta “1” del doppio bipolo di resistori lineari un generatore di corrente, i_1 , e alla porta “2” un cortocircuito, Figura 5.22; il circuito C_2 è ottenuto collegando alla porta “1” del doppio bipolo di resistori lineari un circuito aperto e alla porta “2” un generatore di tensione, v_2 , Figura 5.22. Si dimostra, applicando il teorema di Tellegen, che

$$i_1 v_{12} = -i_{21} v_2. \quad (134)$$

Questa è la *terza forma* della proprietà di reciprocità. Da questa proprietà discende la proprietà (88) per la matrice ibrida di un doppio bipolo di resistori lineari e trasformatori ideali.

5.9 Circuiti mutuamente accoppiati (trasformatore)

Se un avvolgimento di filo conduttore di elettricità viene posto nelle immediate vicinanze di un altro avvolgimento, accade che il flusso del campo magnetico concatenato con le spire di ciascuno dei due dipende sia dall'intensità della corrente elettrica che attraversa il primo avvolgimento che dall'intensità della corrente elettrica che attraversa il secondo avvolgimento. Siamo in presenza, quindi, di un doppio bipolo, che chiameremo *circuiti mutuamente accoppiati o trasformatore*.

I circuiti mutuamente accoppiati sono diffusamente impiegati nei circuiti di comunicazione, nelle apparecchiature di misura e nei sistemi di potenza. I trasformatori che si utilizzano nelle reti di potenza che trasmettono e distribuiscono l'energia elettrica sono circuiti mutuamente accoppiati. Anche i motori e i generatori elettrici sono costituiti da circuiti mutuamente accoppiati. In questo caso la loro posizione relativa cambia nel tempo.

In queste note ci limiteremo a descrivere il caso più semplice, ma non per questo meno significativo, in cui gli avvolgimenti sono due e la loro posizione relativa è tempo-invariante.

5.9.1 Relazioni caratteristiche di due circuiti mutuamente accoppiati

Due circuiti mutuamente accoppiati possono essere schematizzati come in Figura 5.32. Spesso i due avvolgimenti sono realizzati avvolgendo del filo conduttore, smaltato con vernice isolante, su un supporto materiale, fatto di ferrite o lamine sottili di acciaio speciale.

Applicando la legge di Faraday-Neumann a due linee chiuse, in parte coincidenti con i due avvolgimenti, si ottengono per le tensioni v_1 e v_2 del doppio bipolo le relazioni

$$v_1 = \frac{d\phi_1}{dt}, v_2 = \frac{d\phi_2}{dt}, \quad (135)$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono, rispettivamente, i flussi² del campo magnetico concatenati con la bobina “1” e la bobina “2” prodotti dalle intensità delle correnti i_1 e i_2 che attraversano le due bobine. Abbiamo supposto che la conducibilità del conduttore con cui sono realizzati i due avvolgimenti sia infinita.

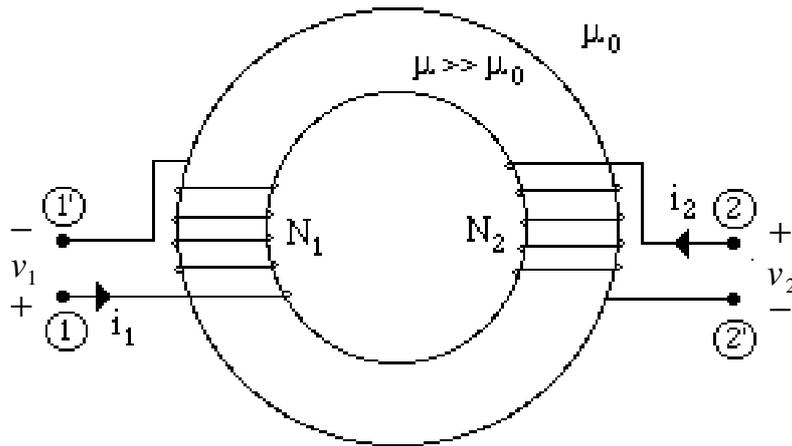


Fig. 5.32 Due circuiti, avvolti attorno a un nucleo toroidale.

Si assuma che il supporto materiale sia costituito da materiale magnetico ideale (isotropo), in cui siano trascurabili gli effetti dovuti ai fenomeni non lineari, come la saturazione e l'isteresi magnetica, e con permeabilità magnetica μ molto grande rispetto a quella del vuoto, $\mu \gg \mu_0$. Inoltre, si assuma che siano trascurabili anche gli effetti delle correnti indotte nell'anello toroidale a causa della variazione nel tempo del campo magnetico (un materiale magnetico può essere un buon conduttore di corrente elettrica).

Sotto queste ipotesi:

- (a) vale la sovrapposizione degli effetti;
- (b) solo le correnti di conduzione dei due avvolgimenti producono campo magnetico;

² $\phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 dS$, dove S_1 è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo il primo avvolgimento e \mathbf{n}_1 è il verso della normale orientata concordemente con il verso di riferimento della corrente i_1 , secondo la regola del cavatappi; ϕ_2 è definito in modo analogo.

(c) la relazione tra i flussi e le intensità di corrente è di tipo algebrico (perché si suppone che siano trascurabili i fenomeni di isteresi magnetica e gli effetti delle correnti indotte nel nucleo.)

Inoltre, in condizioni di *funzionamento lentamente variabili* il legame tra le intensità delle correnti e il campo \mathbf{H} è di tipo istantaneo (*legge di Ampere*). Allora per i flussi ϕ_1 e ϕ_2 si ha

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 i_1 + M_{12} i_2, \\ \phi_2 &= \phi_{21} + \phi_{22} = M_{21} i_1 + L_2 i_2,\end{aligned}\tag{136}$$

dove L_1 , L_2 , M_{12} e M_{21} sono quattro parametri indipendenti dalle due correnti i_1 e i_2 e costanti nel tempo.

Il flusso $\phi_{11} = L_1 i_1$ è il flusso concatenato con la prima bobina quando la corrente i_2 nella seconda bobina è uguale a zero, e $\phi_{22} = L_2 i_2$ è il flusso concatenato con la seconda bobina quando la corrente i_1 nella prima bobina è uguale a zero. Quindi L_1 e L_2 sono, rispettivamente, i coefficienti di autoinduzione della bobina “1” e della bobina “2”.

I coefficienti M_{12} e M_{21} sono detti coefficienti di mutua induzione: M_{12} rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “1” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “2” quando $i_1 = 0$, mentre M_{21} rappresenta il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina “2” prodotto da una corrente unitaria che circola nella bobina “1” quando $i_2 = 0$.

I coefficienti di autoinduzione sono intrinsecamente positivi (con la convenzione dell’utente), mentre quelli di mutua induzione possono essere positivi o negativi.

Consideriamo il flusso ϕ_{12} . Esso è dato da $\phi_{12} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 dS$ dove S_1 è una qualsiasi superficie aperta che ha come orlo il primo avvolgimento, \mathbf{B}_2 è il campo magnetico prodotto dalla corrente di intensità i_2 e \mathbf{n}_1 è il verso della normale orientata concordemente con il verso di riferimento della corrente i_1 , secondo la regola del cavatappi. Nei due circuiti accoppiati illustrati in Figura 5.31 il verso del campo magnetico \mathbf{B}_2 è orario se i_2 è positiva e il verso di \mathbf{n}_1 è orario, e quindi ϕ_{12} e il coefficiente di mutua induzione sono positivi. Se si scegliesse il riferimento opposto per il verso di i_2 (deve essere cambiato anche il riferimento per il verso della tensione v_2 perché abbiamo scelto di fare la

convenzione dell'utilizzatore su ciascuna porta), allora il segno del coefficiente di mutua induzione sarebbe negativo. Considerazioni simili valgono per ϕ_{21} .

Per i flussi del campo magnetico e le intensità di corrente esiste una proprietà di reciprocità analoga a quella che esiste in un circuito resistivo per le tensioni e le correnti. Si considerino i due circuiti accoppiati con $i_1 \neq 0$ e $i_2 = 0$: l'intensità di corrente i_1 può essere considerata come "causa" e il flusso $\phi_{21} = M_{21}i_1$, concatenato con l'avvolgimento "2", come effetto. Dualmente si considerino i due induttori accoppiati con $i_2 \neq 0$ e $i_1 = 0$. In questo caso l'intensità di corrente i_2 può essere considerata come causa e il flusso $\phi_{12} = M_{12}i_2$, concatenato con l'avvolgimento "1", come effetto. È possibile dimostrare, utilizzando le equazioni del modello quasi stazionario magnetico (**Appendice A5**), che il rapporto tra la causa e l'effetto nei due circuiti accoppiati con $i_2 = 0$ è uguale al rapporto tra causa ed effetto nei due circuiti accoppiati con $i_1 = 0$, quindi

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (137)$$

Il coefficiente di mutua induzione è stato indicato con M e si misura in *henry* [H], come i coefficienti di autoinduzione.

Le equazioni caratteristiche di due circuiti accoppiati tempo invarianti (trasformatore) sono

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ v_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (138)$$

(Queste equazioni non valgono nel caso in cui M fosse variabile nel tempo).

In Figura 5.33 è riportato il simbolo di due circuiti accoppiati. Se i versi di riferimento per le intensità di corrente sono entrambi entranti nella coppia di terminali indicati dalla doppia freccia che accompagna il simbolo M , allora il coefficiente di mutua induzione è positivo.

Alle equazioni differenziali (138) bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento dei due circuiti accoppiati (trasformatore) e, quindi, del circuito in cui essi sono inseriti, i valori delle intensità di corrente i_1 e i_2 all'istante iniziale (che per convenzione fissiamo a $t = 0$), $i_1(t = 0) = I_1$ e $i_2(t = 0) = I_2$. Come per l'induttore, è evidente che $i_1(t)$ e $i_2(t)$ dipendono sia

dalla storia delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ nell'intervallo $(0, t)$ che dai loro valori iniziali. Per questa ragione si dice che il trasformatore è un *doppio bipolo a memoria*, cioè il suo comportamento al generico istante t dipende anche da ciò che è accaduto al suo interno negli istanti precedenti. Attraverso le condizioni iniziali si porta in conto l'influenza della storia del trasformatore, precedente all'istante iniziale $t = 0$, sul suo comportamento nell'intervallo $(0, t)$.

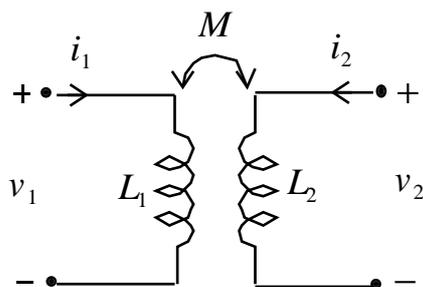


Fig. 5.33 Simbolo di due circuiti mutuamente accoppiati (trasformatore).

Osservazione

La legge espressa dalla (136) è una legge approssimata, che vale solo in condizioni di funzionamento lentamente variabili: essa è verificata esattamente solo in regime stazionario (**Appendice A4**). Nel modello circuitale si assume che sia esattamente verificata in qualsiasi condizione di funzionamento. Invece, la legge espressa dalla (135) vale esattamente in qualsiasi condizione di funzionamento.

◆

La potenza elettrica assorbita dai due induttori accoppiati (tempo invarianti) è

$$p(t) = i_1 v_1 + i_2 v_2 = \frac{dW_m}{dt}, \quad (139)$$

dove

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 = \iiint_{\Omega} (B^2 / \mu) dv \geq 0 \quad (140)$$

è l'energia immagazzinata nel componente associata al campo magnetico; essa è positiva. Pertanto l'energia $W(t_0, t)$ che il doppio bipolo assorbe nell'intervallo di tempo (t_0, t) vale

$$W(t_0, t) = W_m [i_1(t), i_2(t)] - W_m [i_1(t_0), i_2(t_0)]. \quad (141)$$

Come i condensatori e gli induttori, i circuiti accoppiati non dissipano l'energia elettrica che assorbono ma la immagazzinano. Essa può essere restituita, completamente, sotto forma di energia elettrica al circuito in cui sono inseriti. Per questa ragione anche essi sono elementi conservativi. Siccome l'energia immagazzinata dai circuiti accoppiati è positiva, essi non possono erogare più energia elettrica di quanta ne abbiano assorbita in precedenza, e quindi sono passivi.

Il coefficiente di mutua induzione è spesso espresso in funzione del *coefficiente d'accoppiamento* k definito da

$$k \equiv \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (142)$$

Il coefficiente di accoppiamento non può assumere un qualsiasi valore, esso deve verificare la relazione

$$|k| \leq 1. \quad (143)$$

Quando $k=0$, si ha $M=0$, cioè non esiste interazione tra i due induttori (questa è la condizione che è stata invocata tra gli induttori di un circuito quando sono stati introdotti i bipoli induttori). Quando $k=1$ si dice che i due circuiti sono accoppiati perfettamente. Si intuisce che non può esistere una condizione di accoppiamento tra i due circuiti più favorevole di quella corrispondente all'accoppiamento perfetto.

La relazione (143) è una diretta conseguenza del fatto che l'espressione dell'energia immagazzinata è semi definita positiva in accordo con la relazione (140). L'energia immagazzinata può essere riscritta nel modo seguente

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) i_2^2 \geq 0. \quad (144)$$

Siccome L_1 L_2 sono maggiori di zero, se fosse possibile $|k| > 1$, sarebbe possibile avere una energia immagazzinata minore di zero con una coppia di correnti che verificano la relazione $i_1 = -(M/L_1)i_2$.

Siccome l'energia immagazzinata nel trasformatore a un generico istante di tempo dipende solo dai valori delle due intensità di corrente a quell'istante, le intensità di corrente i_1 e i_2 giocano un ruolo particolare rispetto a quello delle due tensioni v_1 e v_2 . Per questa ragione diciamo che le intensità di corrente i_1 e i_2 (i rispettivi flussi) sono le *grandezze di stato* del trasformatore. Conoscere lo stato iniziale del trasformatore significa conoscere l'energia che in esso è immagazzinata.

5.9.2 Accoppiamento perfetto

Si definiscano i flussi medi di auto e mutua induzione come

$$\phi_{11m} = \frac{L_1 i_1}{N_1}, \quad \phi_{12m} = \frac{M_{12} i_2}{N_1}, \quad \phi_{21m} = \frac{M_{21} i_1}{N_2}, \quad \phi_{22m} = \frac{L_2 i_2}{N_2}, \quad (145)$$

dove N_1 e N_2 sono, rispettivamente, il numero di spire dei due avvolgimenti. Le grandezze

$$\phi_{1d} = \phi_{11m} - \phi_{21m}, \quad \phi_{2d} = \phi_{22m} - \phi_{12m} \quad (146)$$

rappresentano i *flussi medi di dispersione* al primario e secondario, rispettivamente.

La condizione ideale in cui i flussi dispersi siano nulli dà luogo alla cosiddetta condizione di *accoppiamento perfetto*,

$$L_1 L_2 = M^2. \quad (147)$$

In questa situazione una corrente nel primo avvolgimento produce, mediamente, lo stesso flusso concatenato per spira sia nel primo che nel secondo avvolgimento e, viceversa.

Si assuma che il toro di materiale magnetico sia un tubo di flusso per \mathbf{B} . Anche se ciò è chiaramente impossibile da realizzare in pratica, è possibile avvicinarsi a questa condizione usando un toro di materiale ferromagnetico di elevata

permeabilità magnetica, $\mu \gg \mu_0$. Quando è verificata questa condizione le linee di campo di \mathbf{B} sono praticamente confinate nel toro di materiale magnetico: il toro si comporta come se fosse un tubo di flusso per il campo \mathbf{B} , cioè si può ritenere che, la componente normale di \mathbf{B} alla superficie limite del toro è nulla. (È immediata l'analogia con il campo di corrente che si instaura in un toro conduttore con conducibilità elettrica molto più grande dello spazio materiale in cui è immerso).

In questa condizione limite il flusso del campo magnetico attraverso qualsiasi sezione del toro è costante, non c'è flusso disperso e, quindi, si ha accoppiamento perfetto. Questa è, chiaramente, una situazione ideale.

Sotto questa ipotesi è semplice calcolare i coefficienti di auto e di mutua induzione. Se le due bobine sono realizzate in modo tale da potere essere schematizzate come dei solenoidi lunghi, per i due coefficienti L_1 e L_2 si hanno le espressioni approssimate

$$L_1 = \mu \frac{N_1^2 S}{h}, \quad L_2 = \mu \frac{N_2^2 S}{h}. \quad (148)$$

Si è assunto che i due solenoidi cilindrici hanno la stessa lunghezza h e la stessa sezione S .

Dalle espressioni (148), applicando la condizione di accoppiamento perfetto (147) si ottiene per il coefficiente di mutua induzione,

$$M = \mu \frac{N_1 N_2 S}{h}. \quad (149)$$

Quando l'accoppiamento è perfetto, l'energia magnetica immagazzinata è data da

$$W_m(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 = \frac{1}{2} L_2 \left(i_2 + \frac{M}{L_2} i_1 \right)^2 \geq 0. \quad (150)$$

Pertanto l'energia immagazzinata è uguale a zero se

$$i_1 = -\left(M / L_1 \right) i_2, \quad (151)$$

pur essendo $i_1 \neq 0$ e $i_2 \neq 0$. Affinché ciò accada, il campo magnetico netto prodotto dalle due correnti deve essere uguale a zero in ogni punto dello spazio, cioè il campo prodotto dalla corrente di intensità i_1 deve cancellare il campo dovuto alla corrente di intensità i_2 in ogni punto dello spazio. Ciò è possibile solo se non c'è dispersione del flusso.

5.9.3 Circuito equivalente di due circuiti perfettamente accoppiati

Si consideri il caso limite di accoppiamento perfetto, $k = \pm 1$. Un trasformatore è sempre progettato e realizzato in modo tale da essere quanto più possibile vicino a questa condizione di funzionamento.

Due induttori perfettamente accoppiati hanno una notevole proprietà. Le equazioni costitutive (147) possono essere sempre riscritte come

$$v_1 = L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right), \quad (152)$$

$$v_2 = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right). \quad (153)$$

Siccome nel caso di accoppiamento perfetto si ha

$$L_1/M = M/L_2, \quad (154)$$

dividendo membro a membro le (152) e (153) si ottiene

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}. \quad (155)$$

Questa relazione ricorda la relazione caratteristica del trasformatore ideale con costante di trasformazione

$$n = \frac{L_1}{M}. \quad (156)$$

Il doppio bipolo costituito da due circuiti accoppiati perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da un induttore, così come illustrato in Figura 5.34. Ora verificheremo questa

affermazione. Si consideri il circuito di Figura 5.34a. Applicando la relazione caratteristica del trasformatore ideale, si ottiene proprio la relazione costitutiva di due induttori accoppiati,

$$v_1 = L_1 \frac{d(i_1 - \bar{i}_1)}{dt} = L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt} \right) = L_1 \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right), \quad (157)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{n} = \frac{M}{L_1} v_1 = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right) = M \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{di_2}{dt} \right); \quad (158)$$

\bar{i}_1 è l'intensità della corrente elettrica che attraversa la porta "1" del trasformatore ideale. Si lascia al lettore la verifica che anche il circuito riportato in Figura 5.34b è un circuito equivalente del trasformatore ad accoppiamento perfetto.

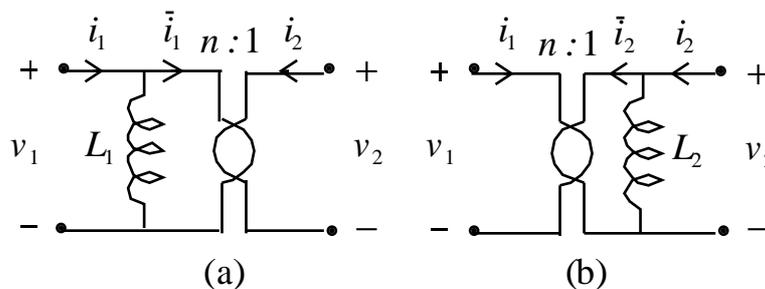


Fig. 5.34 *Doppi bipoli equivalenti a due induttori accoppiati perfettamente: $n = L_1 / M$.*

Osservazione

Due circuiti accoppiati perfettamente hanno una sola grandezza di stato. Essa è l'intensità di corrente $i_{L_1} = i_1 + i_2/n$, che attraversa l'induttore di induttanza L_1 nel circuito equivalente di Figura 5.34a (o equivalentemente l'intensità di corrente $i_{L_2} = i_2 + ni_1$ che attraversa l'induttore di induttanza L_2 nel circuito equivalente di Figura 5.34b). Infatti, quando l'accoppiamento è perfetto l'energia immagazzinata nel trasformatore non dipende separatamente dalle due intensità i_1 e i_2 , ma solo dalla combinazione lineare $i_1 + i_2/n$ (o equivalentemente dalla combinazione lineare $i_2 + ni_1$), vedi espressione (150).

◆

5.9.4 Circuito equivalente di due circuiti non perfettamente accoppiati

Il doppio bipolo costituito da due induttori accoppiati non perfettamente è equivalente a un doppio bipolo costituito da un trasformatore ideale e da due induttori, così come illustrato in Figura 5.35.

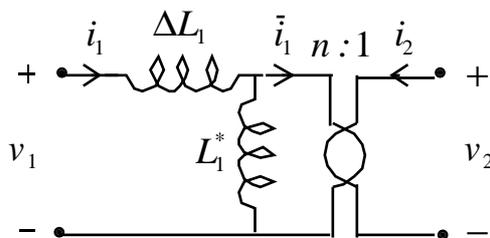


Fig. 5.35 Doppio bipolo equivalente a due induttori accoppiati con $|k| < 1$.

Si considerino due induttori accoppiati non perfettamente, cioè $M^2 < L_1 L_2$. Assegnata una qualsiasi terna L_1 , L_2 e M è sempre possibile rappresentare L_1 come

$$L_1 = L_1^* + \Delta L_1. \quad (159)$$

dove

$$L_1^* = \frac{M^2}{L_2}, \quad (160)$$

$$\Delta L_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}. \quad (161)$$

Queste considerazioni giustificano il circuito equivalente di un accoppiamento non perfetto illustrato in Figura 5.35. L'induttanza ΔL_1 è legata ai flussi dispersi: essa descrive il contributo al flusso concatenato con la prima bobina dovuto alle "linee di campo di \mathbf{B} " che non concatenano l'altro avvolgimento; per $k^2 \rightarrow 1$, $\Delta L_1 \rightarrow 0$. L_1^* è detta induttanza magnetizzante: essa tiene conto del flusso comune a entrambe le bobine.

È interessante osservare che un trasformatore progettato e costruito per ottenere le migliori prestazioni possibili tende ad essere un "trasformatore ideale". Infatti, perché l'accoppiamento sia perfetto occorre che le due bobine siano

strettamente avvolte su di un nucleo di materiale ferromagnetico ad elevata permeabilità relativa, $\mu_r = (\mu/\mu_0) \gg 1$. In tali condizioni, infatti, $\Delta L_1 \rightarrow 0$ e $k^2 \rightarrow 1$. Inoltre nel limite $\mu_r \rightarrow \infty$ si ha $L_1^* \rightarrow \infty$ e quindi la corrente magnetizzante che circola nell'induttore di induttanza L_1^* deve tendere a zero e di conseguenza il circuito equivalente di Figura 5.35 si riduce al solo trasformatore ideale.