CAPITOLO 7

CIRCUITI DINAMICI

7.1 Introduzione

Il Capitolo 5 è stato dedicato esclusivamente all'analisi di circuiti dinamici lineari tempo invarianti in regime permanente (stazionario, sinusoidale, periodico, ...). Ricordiamo che con circuiti dinamici intendiamo i circuiti che contengono oltre a elementi adinamici (resistori, trasformatori ideali, generatori controllati, generatori indipendenti, giratori, amplificatori operazionali), anche elementi dinamici (condensatori, induttori e circuiti mutuamente accoppiati). In questo Capitolo, invece, studieremo i circuiti dinamici lineari, anche tempo varianti, in condizioni di funzionamento generiche, a partire da un istante assegnato, che denomineremo *istante iniziale* e indicheremo con t_0.

Nel Capitolo 2 abbiamo già studiato approfonditamente dei circuiti dinamici "semplici", § **2.4** e **2.6**. Ora estenderemo il metodo di analisi che lì abbiamo presentato a generici circuiti dinamici del <u>primo</u> e <u>secondo</u> ordine. I circuiti costituiti da un solo bipolo dinamico (condensatore o induttore) e da elementi adinamici prendono il nome di circuiti del <u>primo ordine</u>. I circuiti costituiti da due bipoli dinamici e da elementi adinamici prendono il nome di circuiti del <u>secondo ordine</u>. Anche un circuito costituito da due circuiti mutuamente accoppiati e elementi adinamici è, in generale, un circuito del secondo ordine. Un circuito di ordine m contiene m bipoli dinamici. Inoltre, ricordiamo che con l'espressione "circuito *RC*" si intende un generico circuito dinamico con soli condensatori, "circuito *RL*" si intende un generico circuito dinamico con soli induttori e/o circuiti mutuamente accoppiati, e "circuito *RLC*" si intende un generico circuito dinamico con induttori e/o circuiti mutuamente accoppiati e condensatori.

Alle equazioni circuitali, costituite da un insieme completo e linearmente indipendente di equazioni di Kirchhoff e dalle equazioni caratteristiche degli elementi circuitali, bisogna affiancare, per una descrizione completa del comportamento del circuito, il valore all'istante iniziale della tensione di ciascun condensatore, dell'intensità di corrente di ciascun induttore e delle intensità di corrente di ciascuno dei circuiti mutuamente accoppiati.
La tensione del condensatore descrive lo *stato* del condensatore (vedi § **1.10.9**), l'intensità di corrente dell'induttore descrive lo *stato* dell'induttore (vedi § **1.10.10**) e le intensità di corrente di due circuiti mutuamente accoppiati descrivono lo stato del trasformatore (vedi § **4.8.1**). Conoscere lo stato di un elemento dinamico a un dato istante significa conoscere l'energia in esso immagazzinata in quell'istante. I resistori non immagazzinano l'energia che assorbono e, quindi, per essi non è possibile individuare nessuna grandezza di stato. Per questa ragione, le tensioni dei condensatori, le intensità di corrente degli induttori e le intensità di corrente dei circuiti accoppiati prendono il nome di <u>grandezze di *stato* del circuito</u>.
Discuteremo una importante proprietà delle grandezze di stato di un circuito, molto utile nella soluzione di circuiti che contengono generatori indipendenti di tensione (e/o corrente) con tensioni (e/o correnti) discontinue e/o interruttori. Introdurremo il concetto di circuito resistivo associato di un circuito dinamico, un potente strumento per determinare le equazioni di stato del circuito. Infine, approfondiremo i concetti di circuito dissipativo e circuito conservativo, di transitorio e regime permanente, nonché quello di evoluzione libera ed evoluzione forzata.

7.2 Equazioni di stato e circuito resistivo associato

Le equazioni circuitali, insieme alle condizioni iniziali per le grandezze di stato, descrivono completamente la dinamica di un circuito. Ad eccezione delle equazioni caratteristiche degli elementi dinamici, le equazioni circuitali sono tutte di tipo algebrico. Le equazioni caratteristiche degli elementi dinamici sono equazioni differenziali.
La tecnica più generale per la soluzione di un circuito lineare, che già abbiamo applicato nel § **2.4**, consiste nel ridurre, attraverso la tecnica della eliminazione per sostituzione, il sistema completo di equazioni del circuito, ad una sola equazione in una sola incognita. Una volta risolta l'equazione in una sola

incognita, si possono determinare eventuali altre grandezze di interesse, che sono state eliminate nella procedura di riduzione. Ovviamente, questa tecnica può essere applicata senza alcuna difficoltà anche a circuiti complessi con tanti elementi dinamici.
La procedura di riduzione più semplice consiste nel ridurre, prima, il sistema completo di equazioni del circuito al sistema di equazioni in cui le incognite sono solo le grandezze di stato, le cosiddette *equazioni di stato del circuito*, e poi, eventualmente, ridurre le equazioni di stato ad una sola equazione in una sola incognita. Come poi faremo vedere, tutte le altre grandezze circuitali possono essere espresse in funzione delle grandezze di stato, delle tensioni dei generatori ideali di tensione e delle intensità di corrente dei generatori ideali di corrente attraverso sole relazioni di tipo algebrico, utilizzando un procedimento estremamente semplice ed elegante.

7.2.1 Circuiti *RC* del primo ordine

Per determinare le equazioni di stato di un circuito non c'è bisogno di considerare esplicitamente il sistema completo di equazioni del circuito. Ora illustreremo un procedimento estremamente semplice ed elegante per fare ciò.
Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad esempio, a quello mostrato in Figura 7.1. Esso è un circuito *RC* del primo ordine, che a differenza di quello già risolto nel § **2.4**, è costituito di più di due elementi adinamici. L'estensione dei risultati che otterremo a situazioni più generali non presenta alcuna difficoltà, come poi vedremo.

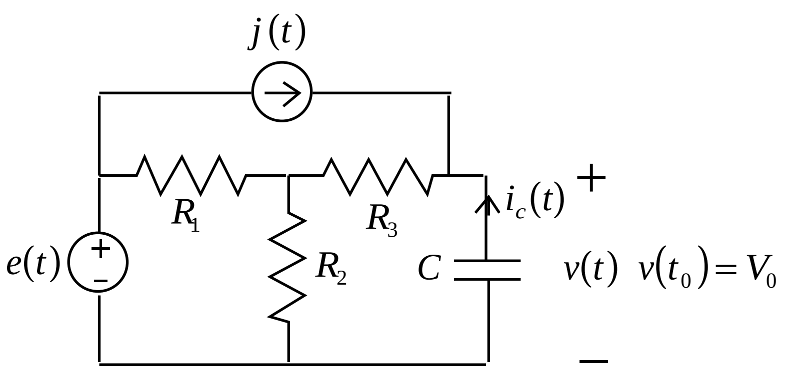

Fig. 7.1 *Esempio di circuito dinamico del primo ordine.*

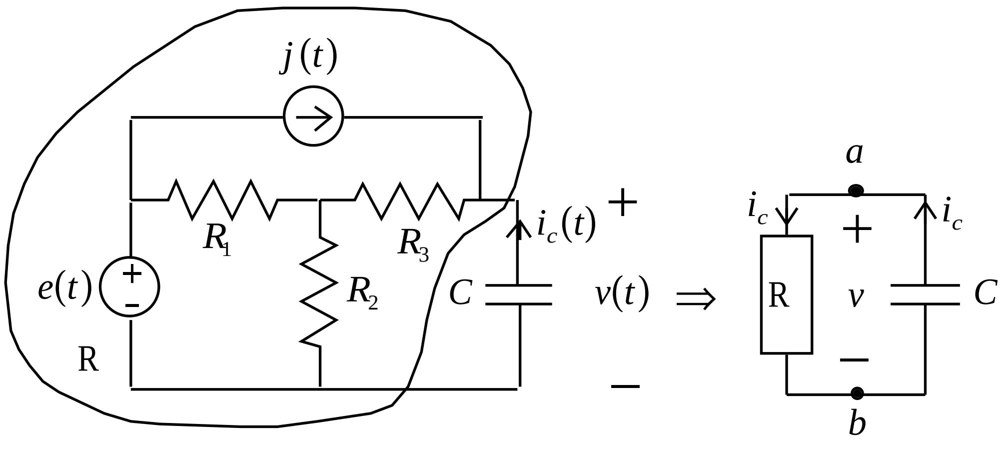

Fig. 7.2 *Il circuito di Figura 7.1 può essere schematizzato come un condensatore in parallelo con un bipolo resistivo.*

Per determinare l'equazione di stato del circuito del primo ordine illustrato in Figura 7.1 è utile riferirsi alla rappresentazione illustrata in Figura 7.2, dove é stata messa in evidenza la parte adinamica, che abbiamo indicato con il simbolo R . La tensione del condensatore è, in ogni istante, determinato dall'interazione tra il condensatore stesso e il resto del circuito, che consiste in un bipolo di soli elementi adinamici, il bipolo R . Si può dire che l'equazione che governa la tensione $v(t)$ è il frutto della interazione tra due diverse esigenze: che il condensatore si comporti in modo compatibile con la sua specifica natura e che tale comportamento sia a sua volta compatibile con quello di tutti gli altri elementi che definiscono il bipolo adinamico R .

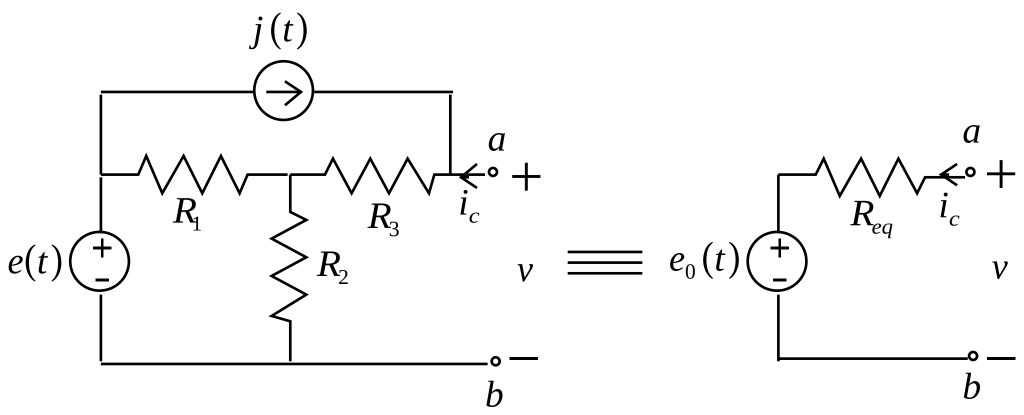

Fig. 7.3 *Bipolo equivalente di Thévenin della parte adinamica del circuito 7.1.*

Il bipolo adinamico R può essere rappresentato attraverso il bipolo generatore equivalente di Thévenin, Figura 7.3; e_0 è la tensione a vuoto del bipolo

adinamico R e R_{eq} è la resistenza equivalente di Thévenin del bipolo R , cioè la resistenza equivalente di R quando tutti i generatori ideali al suo interno sono spenti.
L'equazione differenziale (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per il condensatore)

$$C\frac{dv}{dt} = -i_c \tag{1}$$

descrive il funzionamento del condensatore, e l'equazione algebrica

$$i_c = \frac{v - e_0}{R_{eq}} \tag{2}$$

descrive il funzionamento del bipolo adinamico R . L'equazione che ne deriva è l'*equazione di stato del circuito*,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_{eq}C} = \frac{e_0}{R_{eq}C}. \tag{3}$$

Abbiamo già illustrato questa tecnica nel Capitolo 3. Ovviamente si ottiene lo stesso risultato se invece del bipolo equivalente di Thévenin si utilizzasse il bipolo equivalente di Norton per rappresentare la parte resistiva del circuito.
L'equazione (3) deve essere risolta con la condizione iniziale

$$v(t_0) = V_0; \tag{4}$$

stiamo assumendo come istante iniziale un generico valore che indichiamo con t_0. La soluzione dell'equazione differenziale (3) con la condizione iniziale (4) prende il nome di *Problema di Cauchy*.
Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie [1] si ha la seguente proprietà:

<u>Esiste</u> <u>una</u> e <u>una sola</u> soluzione dell'equazione (3) *che verifica le condizione iniziale* (4).

1 Vedi, ad esempio, in C.Miranda, Lezioni di Analisi Matematica, Liguori Editore, Napoli 1976.

Questa proprietà così forte è dovuta alla linearità del sistema di equazioni. Di conseguenza una volta assegnato il valore dello stato del circuito all'istante iniziale $t = t_0$, lo stato per $t > t_0$ è univocamente determinato dalle equazioni di stato.

Esercizio

Si verifichi che la resistenza equivalente di Thévenin e la tensione a vuoto del bipolo adinamico R hanno le espressioni

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3,\ e_0(t) = e(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2} + j(t)\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right). \tag{5}$$

L'andamento nel tempo della tensione a vuoto e_0 dipende dall'andamento temporale della tensione $e(t)$ e della corrente $j(t)$.

♦

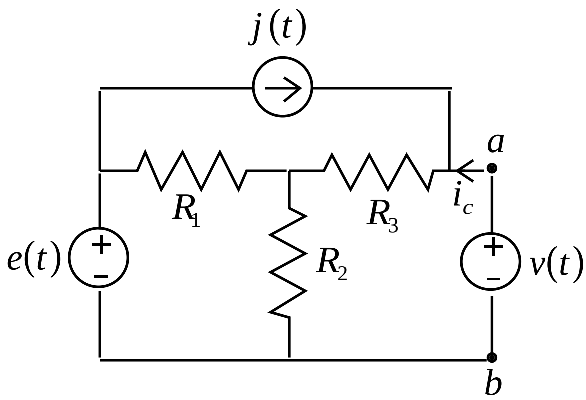

Fig. 7.4 *Circuito resistivo associato al circuito RC del primo ordine riportato in Figura 7.1.*

Una volta risolta l'equazione (3) con la condizione iniziale (4), è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame risolvendo il circuito resistivo ottenuto <u>sostituendo</u> al condensatore un generatore ideale di tensione con tensione uguale proprio alla tensione del condensatore, Figura 7.4. Questo circuito prende il nome di *circuito resistivo associato* al circuito *RC* rappresentato in Figura 7.1. Attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere ogni grandezza del circuito in funzione della grandezza di stato e delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori ideali. Di conseguenza,

ogni grandezza del circuito di Figura 7.1 è esprimibile in funzione della grandezza di stato attraverso solo relazioni di tipo algebrico.
I risultati che abbiamo or ora trovato per il circuito *RC* del primo ordine riportato in Figura 7.1 valgono per un qualsiasi circuito *RC* del primo ordine costituito da elementi adinamici lineari e un condensatore. Infatti, un generico circuito *RC* del primo ordine può essere sempre schematizzato come in Figura 7.5a: un condensatore collegato a un bipolo R costituito da elementi adinamici lineari e generatori ideali. In Figura 7.5b è riportato il circuito equivalente ridotto ottenuto rappresentando il bipolo R con il corrispondente generatore equivalente di Thévenin.

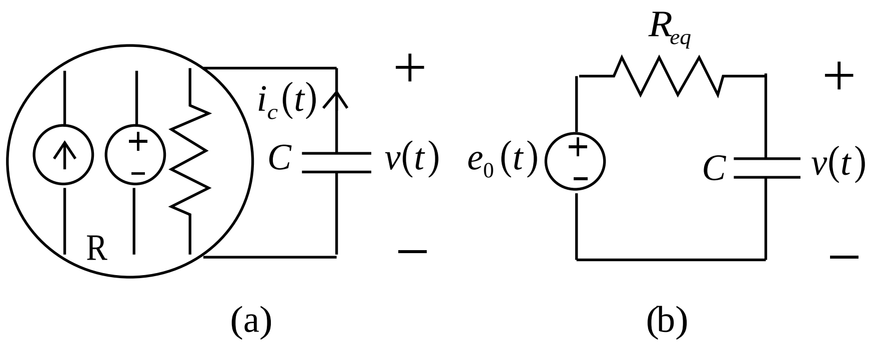

Fig. 7.5 *(a) Un generico circuito RC del primo ordine e (b) corrispondente circuito equivalente.*

Osservazione

Si consideri un circuito *RC* del primo ordine che contenga interruttori. In questo caso la resistenza equivalente di Thévenin del bipolo R è funzione del tempo. Inoltre, la tensione a vuoto dipende dal tempo anche quando i generatori ideali del circuito sono stazionari.
Si consideri, ad esempio, il circuito del primo ordine rappresentato in Figura 7.6, dove la tensione E impressa dal generatore indipendente di tensione è costante. L'interruttore per $t < T$ è chiuso e si apre all'istante $t = T$. Il grafico dell'andamento temporale della tensione a vuoto $e_0 = e_0(t)$ è rappresentato in Figura 7.7a e il grafico dell'andamento temporale della resistenza equivalente di Thévenin, $R_{eq}(t)$, è rappresentato in Figura 7.7b. Questo è un esempio di circuito tempo-variante.

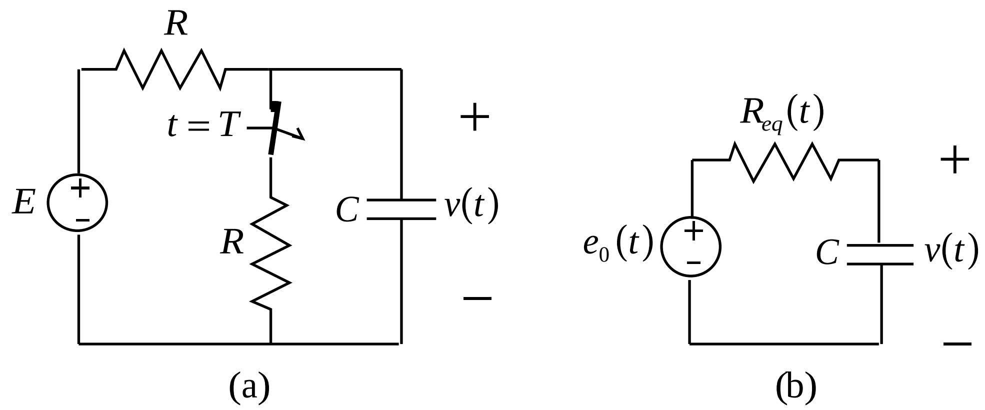

Fig. 7.6 *Circuito RC tempo-variante (l'interruttore si apre all'istante t=T).*

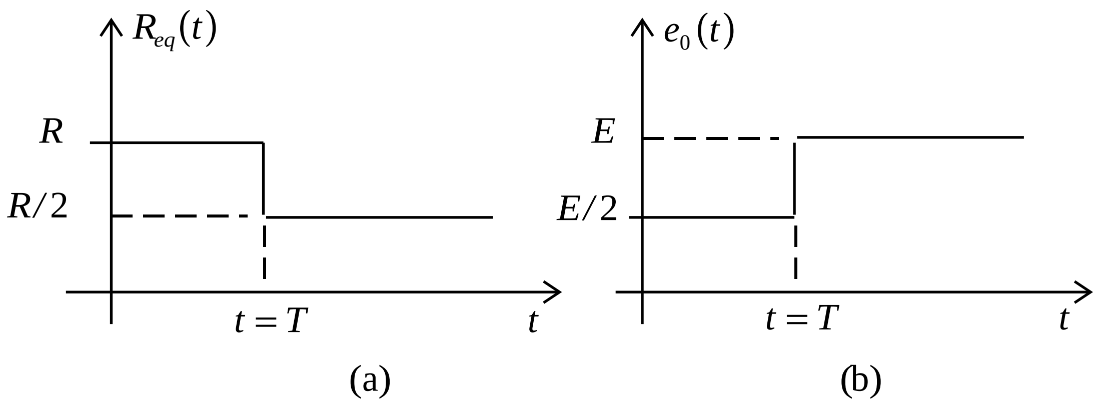

Fig. 7.7 *Andamento temporale della resistenza equivalente di Thévenin e della tensione a vuoto della parte adinamica del circuito di Figura 7.6a.*

♦

7.2.2 Circuiti *RL* del primo ordine

Si consideri un generico circuito *RL* del primo ordine costituito da elementi lineari e un induttore, Figura 7.8a. Anche in questo caso l'interazione dell'unico elemento dinamico del circuito con la parte adinamica può essere rappresentata attraverso il generatore equivalente di Thévenin (o il generatore equivalente di Norton), Figura 7.8b.
L'equazione differenziale (abbiamo adottato anche in questo caso la convenzione dell'utilizzatore per l'induttore)

$$L\frac{di}{dt} = -v_L \tag{6}$$

descrive il funzionamento dell'induttore e l'equazione algebrica

$$v = R_{eq} i + e_0 \tag{7}$$

descrive il funzionamento del bipolo adinamico R . L'equazione che ne deriva è l'*equazione di stato del circuito*,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} i = \frac{e_0}{L}. \tag{8}$$

Questa equazione deve essere risolta con la condizione iniziale

$$i(t_0) = I_0 . \tag{9}$$

Anche in questo caso bisogna risolvere un problema di Cauchy che ammette una e una sola soluzione.

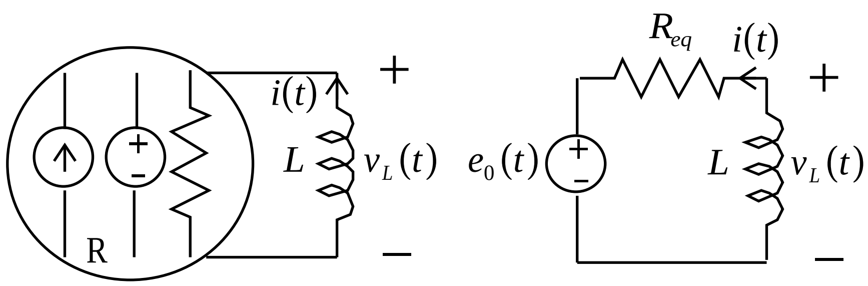

Fig. 7.8 *(a) Un generico circuito RL del primo ordine e (b) corrispondente circuito equivalente.*

Una volta risolta l'equazione di stato (8) con la condizione iniziale (9), è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame risolvendo il circuito resistivo ottenuto sostituendo all'induttore un generatore indipendente di corrente con corrente uguale all'intensità della corrente elettrica dell'induttore, Figura 7.9. Il circuito così ottenuto è il *circuito resistivo associato* al circuito *RL* rappresentato in Figura 7.9a. Come nel caso del circuito *RC*, attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere ogni grandezza del circuito in funzione della sola corrente dell'induttore (che è la grandezza di stato del circuito), e delle tensioni e delle correnti impresse dai generatori indipendenti. Di conseguenza, ogni grandezza del circuito di Figura 7.8a è esprimibile in funzione della sola grandezza di stato attraverso solo relazioni di tipo algebrico.

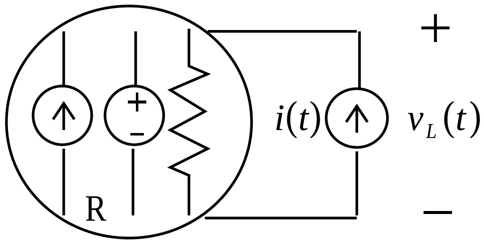

Fig. 7.9 *Circuito resistivo associato al circuito RL del primo ordine di Figura 7.8a.*

7.2.3 Circuiti *RLC* del secondo ordine

Ora estenderemo la procedura che abbiamo appena utilizzato per determinare l'equazione di stato di un circuito del primo ordine al caso più generale di un circuito del secondo ordine.
Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad esempio, a quello mostrato in Figura 7.10a. Esso è un circuito *RLC* del secondo ordine con un generatore indipendente di tensione; i resistori, il condensatore e l'induttore sono tempo-invarianti. L'estensione dei risultati che otterremo a situazioni più generali non presenta alcuna difficoltà, come poi vedremo.

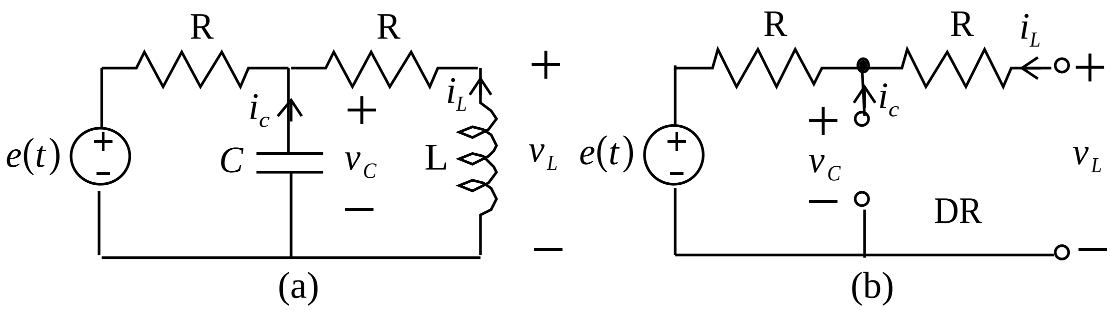

Fig. 7.10 *(a) Circuito RLC del secondo ordine e (b) corrispondente parte resistiva.*

In questo caso il circuito ha due variabili di stato, l'intensità di corrente dell'induttore $i_L = i_L(t)$, e la tensione del condensatore, $v_C = v_C(t)$. Di conseguenza le equazioni di stato di questo circuito sono due.

Anche per un circuito di questo tipo possiamo mettere in evidenza la parte adinamica, costituita da soli resistori e generatori indipendenti. Essa può essere descritta come un doppio bipolo, Figura 7.10b: alla porta *a-a'* del doppio bipolo DR è collegato il condensatore e alla porta *b-b'* è collegato l'induttore, Figura 7.10b.
Le equazioni differenziali (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per il condensatore e l'induttore)

$$C\frac{dv_C}{dt} = -i_c, \tag{10}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_L, \tag{11}$$

descrivono, rispettivamente, il funzionamento del condensatore e dell'induttore del circuito di Figura 7.10.
Per esprimere l'intensità di corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato del circuito bisogna caratterizzare il doppio bipolo DR . Questa caratterizzazione può essere effettuata attraverso il *circuito resistivo associato*.

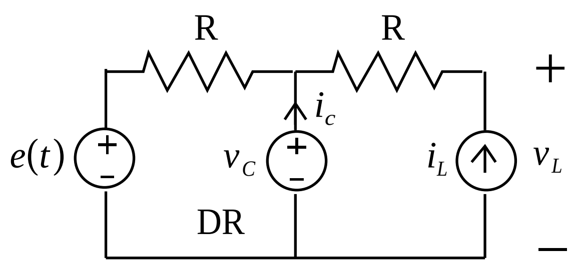

Fig. 7.11 *Circuito resistivo associato al circuito dinamico riportato in Figura 7.10a.*

In Figura 7.11 è riportato il circuito resistivo associato al circuito dinamico di Figura 7.10a, ottenuto sostituendo al posto del condensatore un generatore indipendente di tensione con tensione $v_C(t)$ e al posto dell'induttore un generatore indipendente di corrente di intensità $i_L(t)$. La soluzione del circuito resistivo associato di Figura 7.11 è semplice. Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo

$$i_c = \frac{v_C}{R} - i_L - \frac{e}{R}, \tag{12}$$

$$v_L = v_C + Ri_L. \tag{13}$$

Osservazione

È come se stessimo caratterizzando il doppio bipolo DR assumendo come variabili indipendenti la tensione v_C della porta *a-a’* e la corrente i_L della porta *b-b’* e come variabili dipendenti la corrente i_C della porta *a-a’* e la tensione v_L della porta *b-b’*. Ricordate questa non è altro che una caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo, descritta nel § **5.7.3**. I parametri

$$h_{aa} = \frac{1}{R},\ h_{ab} = -1,\ h_{ba} = 1,\ h_{bb} = R \tag{14}$$

sono proprio i parametri ibridi del doppio bipolo DR quando il generatore di tensione e è spento.

♦

Le equazioni di stato del circuito *RLC* di Figura 7.10a si ottengono combinando le equazioni (10)-(11) con le equazioni (12)-(13). Esse sono

$$C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{R} + i_L + \frac{e}{R}, \tag{15}$$

$$L\frac{di_L}{dt} = -v_C - Ri_L. \tag{16}$$

Le equazioni (15) e (16) sono tra loro indipendenti, quindi le equazioni di stato del circuito *RLC* in esame definiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine nelle due funzioni incognite $v_C = v_C(t)$ e $i_L = i_L(t)$. Esse devono essere risolte con le condizioni iniziali

$$v_C(t_0) = V_0, \tag{17}$$

$$i_L(t_0) = I_0. \tag{18}$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali (15)-(16) con le condizioni iniziali (15)-(16) è un altro Problema di Cauchy. Anche in questo caso esiste una e una sola soluzione del sistema (15)-(16) che verifica le condizioni iniziali (17)-(18).

Una volta risolto il sistema (15)-(16) con le condizioni iniziali (17)-(18), attraverso il circuito resistivo associato di Figura 7.11 è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame.
È evidente che il risultato a cui siamo pervenuti vale per qualsiasi circuito *RLC* del secondo ordine con elementi dinamici tempo-invarianti. Ciò che dipende dal particolare circuito *RLC* in esame sono i parametri e non la struttura delle equazioni di stato (15)-(16).

Osservazione

La struttura delle equazioni circuitali (15)-(16) mette chiaramente in luce che i bipoli dinamici e quelli adinamici giocano due ruoli diversi nel meccanismo che governa l'evoluzione temporale del circuito: in particolare le equazioni caratteristiche dei bipoli adinamici (resistori, generatori, ...) giocano un ruolo simile a quello svolto dalle equazioni di Kirchhoff. Infatti, in analogia con la meccanica, la parte algebrica delle equazioni circuitali può essere considerata come un insieme di *vincoli olonomi*, in generale variabili nel tempo, sulle tensioni e le correnti del circuito in esame, mentre le equazioni differenziali che esprimono le equazioni caratteristiche degli elementi dinamici ricordano le equazioni del moto.

♦

I risultati che abbiamo appena ottenuto si estendono facilmente a situazioni più generali. Consideriamo, ora, un generico circuito *RLC* lineare del secondo ordine (con un solo condensatore e un solo induttore). Esso può essere sempre schematizzato come illustrato in Figura 7.12. In questa schematizzazione la parte adinamica del circuito può essere modellata come un doppio bipolo composto, in generale, da resistori, generatori ideali, trasformatori ideali, generatori controllati, ..., cioè da elementi adinamici lineari e generatori ideali.
Dalle relazioni caratteristiche degli elementi dinamici si ha

$$C\frac{dv_1}{dt} = -i_1, \tag{19}$$

$$L\frac{di_2}{dt} = -v_2. \tag{20}$$

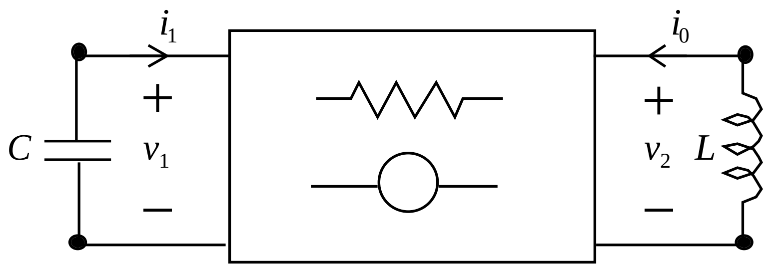

Fig. 7.12 *Schematizzazione di un generico circuito RLC lineare del secondo ordine.*

Ora bisogna esprimere l'intensità di corrente i_1 e la tensione v_2 in funzione delle grandezze di stato di questo circuito, v_1 e i_2, utilizzando il "vincolo" imposto dal doppio bipolo adinamico. Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha

$$i_1 = h_{11}v_1 + h_{12}i_2 + j_{cc}, \tag{21}$$
$$v_2 = h_{21}v_1 + h_{22}i_2 + e_0, \tag{22}$$

dove h_{ij} sono gli elementi della matrice ibrida del doppio bipolo, descritta nel § **5.7.3**, quando tutti i generatori ideali sono spenti. Il contributo degli eventuali generatori ideali presenti è portato in conto attraverso i due termini "noti" j_{cc} e e_0: j_{cc} e e_0 sono, rispettivamente, l'intensità della corrente che attraversa la porta "1" e la tensione della porta "2" quando la porta "1" è cortocircuitata, la porta "2" è aperta e i generatori ideali sono accessi. Le relazioni (21) e (22) rappresentano solo una delle possibili estensioni del teorema di Thévenin-Norton ai doppi bipolo.

Combinando le equazioni (19) e (20) con le equazioni (21) e (22) si ha il sistema di equazioni di stato per un generico circuito *RLC* lineare del secondo ordine,

$$C\frac{dv_1}{dt} = -h_{11}v_1 - h_{12}i_2 - j_{cc}, \tag{23}$$
$$L\frac{di_2}{dt} = -h_{21}v_1 - h_{22}i_2 - e_0. \tag{24}$$

7.2.4 Circuiti *RL* e *RC* del secondo ordine

Prima abbiamo esaminato un circuito *RLC* del secondo ordine. Ora, invece, esamineremo circuiti *RC* e *RL* del secondo ordine. Come al solito, solo per semplificare il ragionamento, faremo riferimento a un circuito ben definito, ad esempio, quello mostrato in Figura 7.13a. Esso è un circuito *RC* del secondo ordine con un generatore indipendente di tensione; i resistori, il condensatore e l'induttore sono tempo-invarianti.
In questo caso le variabili di stato del circuito sono le tensioni dei due condensatori $v_a = v_a(t)$ e $v_b = v_b(t)$. Anche per un circuito di questo tipo possiamo mettere in evidenza la parte adinamica, costituita da soli resistori e generatori indipendenti. Per come abbiamo scelto l'esempio, essa coincide con la parte adinamica del circuito *RLC* che abbiamo precedentemente analizzato e che è rappresentata dal doppio bipolo DR . In questo caso alla porta *a-a'* è collegato il condensatore di capacità C_a e alla porta *b-b'* è collegato il condensatore di capacità C_b, Figura 7.13b.

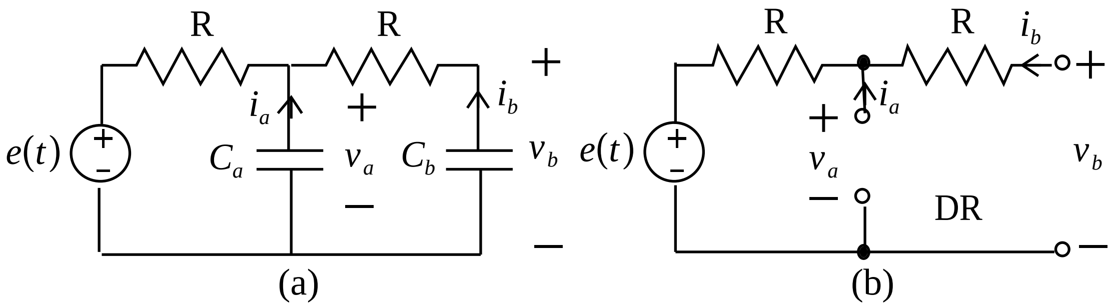

Fig. 7.13 *(a) Circuito RC del secondo ordine e (b) corrispondente parte resistiva.*

Le equazioni differenziali (abbiamo adottato la convenzione dell'utilizzatore per entrambi i condensatori)

$$C_a \frac{dv_a}{dt} = -i_a, \tag{25}$$

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = -i_b, \tag{26}$$

descrivono il funzionamento dei due condensatori.
Per esprimere le correnti dei due condensatori, i_a e i_b, in funzione delle grandezze di stato del circuito bisogna caratterizzare il doppio bipolo DR

assumendo come variabili indipendenti le due tensioni v_a e v_b e come variabili dipendenti le due correnti i_a e i_b. Ricordate questa non è altro che la caratterizzazione su base tensione di un doppio bipolo, § **5.7.2**.
Questa caratterizzazione può essere ottenuta risolvendo il circuito resistivo associato riportato in Figura 7.14, ottenuto sostituendo al posto del condensatore di capacità C_a un generatore indipendente di tensione con tensione v_a e al posto del condensatore di capacità C_b un generatore indipendente di tensione con tensione v_b.

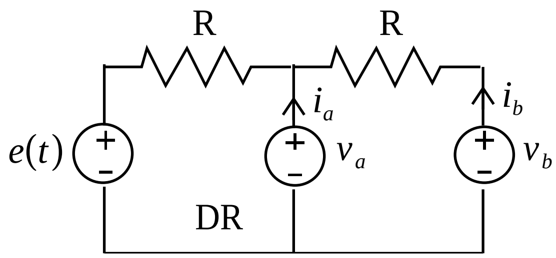

Fig. 7.14 *Circuito resistivo associato al circuito dinamico riportato in Figura 7.10a.*

La soluzione del circuito resistivo associato di Figura 7.14 è semplice. Applicando la sovrapposizione degli effetti abbiamo

$$i_a = \frac{2}{R}v_a - \frac{1}{R}v_b - \frac{e}{R}, \tag{27}$$

$$i_b = -\frac{1}{R}v_a + \frac{1}{R}v_b. \tag{28}$$

Osservazione

È come se stessimo caratterizzando il doppio bipolo DR assumendo come variabili indipendenti la tensione v_a della porta *a-a'* e la tensione v_b della porta *b-b'* e come variabili dipendenti l'intensità di corrente i_a della porta *a-a'* e l'intensità di corrente i_b della porta *b-b'*. Ricordate questa non è altro che la caratterizzazione su base tensione di un doppio bipolo, descritta nel § **5.7.2**. I parametri

$$G_{aa} = \frac{2}{R},\ G_{ab} = G_{ba} = -\frac{1}{R},\ G_{bb} = \frac{1}{R} \tag{29}$$

sono proprio gli elementi della matrice delle conduttanze del doppio bipolo DR quando il generatore di tensione e è spento.

♦

Le equazioni di stato del circuito *RC* di Figura 7.13a si ottengono combinando le equazioni (25)-(26) con le equazioni (27)-(28). Esse sono

$$C_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{2}{R} v_a + \frac{1}{R} v_b + \frac{e(t)}{R}, \tag{30}$$

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{R} v_a - \frac{1}{R} v_b, \tag{31}$$

Le equazioni (30) e (31) sono tra loro indipendenti, come nel caso del circuito *RLC*. Quindi le equazioni di stato del circuito *RC* del secondo ordine in esame definiscono un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine nelle due funzioni incognite $v_a = v_a(t)$ e $v_b = v_b(t)$. Esse devono essere risolte con le condizioni iniziali

$$v_a(t_0) = V_{a0}, \tag{32}$$

$$v_b(t_0) = V_{b0}. \tag{33}$$

Una volta risolto il sistema (30)-(31) con le condizioni iniziali (32)-(33), attraverso il circuito resistivo associato di Figura 7.14 è possibile determinare qualsiasi grandezza del circuito in esame.

È evidente che il risultato a cui siamo pervenuti vale per qualsiasi circuito *RC* del secondo ordine con elementi dinamici tempo-invarianti. Ciò che dipende dal particolare circuito *RC* in esame sono i parametri e non la struttura delle equazioni di stato (30)-(31).

Consideriamo, ora, un generico circuito *RC* lineare del secondo ordine (con due condensatori). Esso può essere sempre schematizzato come illustrato in Figura 7.15. Anche in questo caso la parte adinamica del circuito può essere modellata come un doppio bipolo composto, in generale, da resistori, generatori ideali, trasformatori ideali, generatori controllati, ..., cioè da elementi adinamici lineari e generatori ideali.

Dalle relazioni caratteristiche degli elementi dinamici si ha

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = -i_1, \tag{34}$$
$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = -i_2. \tag{35}$$

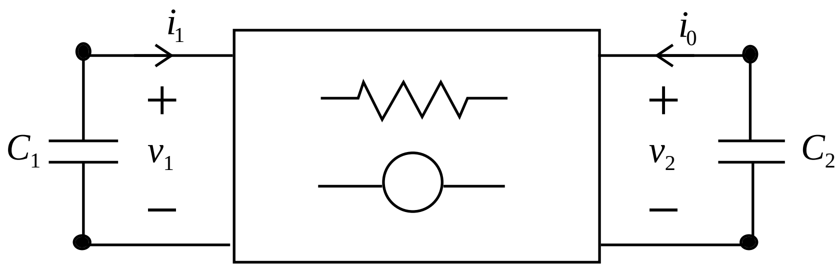

Fig. 7.15 *Schematizzazione di un generico circuito RC lineare del secondo ordine.*

Ora bisogna esprimere le intensità di corrente i_1 e i_2 in funzione delle grandezze di stato di questo circuito, v_1 e v_2, utilizzando il "vincolo" imposto dal doppio bipolo adinamico. Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha

$$i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + j_{cc1}, \tag{36}$$
$$i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + j_{cc2}, \tag{37}$$

dove G_{ij} sono gli elementi della matrice delle conduttanze del doppio bipolo, descritta nel § **5.7.2**, quando tutti i generatori ideali sono <u>spenti</u>. Il contributo degli eventuali generatori ideali presenti è portato in conto attraverso i due termini "noti" j_{cc1} e j_{cc2}: j_{cc1} e j_{cc2} sono, rispettivamente, le intensità della corrente che attraversano la porta "1" e la porta "2" quando esse sono entrambe <u>cortocircuitate</u> e i generatori ideali sono <u>accessi</u>. Le relazioni (36) e (37) rappresentano un'altra delle possibili estensioni del teorema di Thévenin-Norton ai doppi bipolo.

Combinando le equazioni (34) e (35) con le equazioni (36) e (37) si ha il sistema di equazioni di stato per un generico circuito *RC* lineare del secondo ordine,

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = -G_{11}v_1 - G_{12}v_2 - j_{cc1}, \tag{38}$$
$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = -G_{21}v_1 - G_{22}v_2 - j_{cc2}. \tag{39}$$

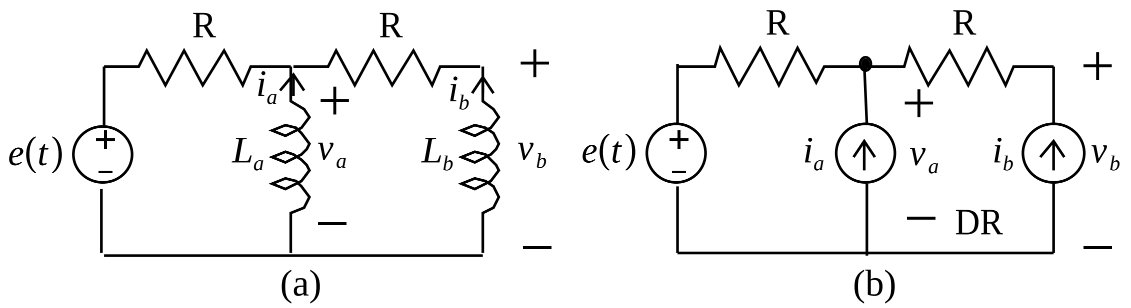

Fig. 7.16 *(a) Un circuito RL del secondo ordine e (b) corrispondente circuito resistivo associato.*

Esercizio

Il lettore verifichi che le equazioni di stato del circuito *RL* del secondo ordine riportato in Figura 7.16 sono

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -Ri_a - Ri_b + e, \tag{40}$$

$$L_b \frac{di_b}{dt} = -Ri_a - 2Ri_b + e. \tag{41}$$

Il circuito resistivo associato è riportato in Figura 7.16b. Esso è stato ottenuto sostituendo ai due induttori due generatori indipendenti di corrente con correnti i_a e i_b.
I coefficienti delle intensità di corrente a secondo membro delle equazioni (40) e (41) sono gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo DR, quando il generatore di tensione e è spento, § **5.7.1**,

$$R_{11} = R,\ R_{12} = R_{21} = R \text{ e } R_{22} = 2R. \tag{42}$$

♦

Consideriamo, ora, un generico circuito *RL* lineare del secondo ordine (con due induttori). Esso può essere sempre schematizzato come illustrato in Figura 7.17. Anche in questo caso la parte adinamica del circuito può essere modellata come un doppio bipolo composto, in generale, da resistori, generatori ideali, trasformatori ideali, generatori controllati, ..., cioè da elementi adinamici lineari e generatori ideali.

Dalle relazioni caratteristiche degli elementi dinamici si ha

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -v_1, \tag{43}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -v_2. \tag{44}$$

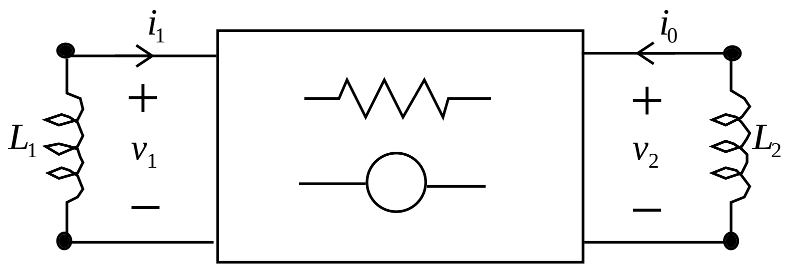

Fig. 7.17 *Schematizzazione di un generico circuito RL lineare del secondo ordine.*

Ora bisogna esprimere le tensioni v_1 e v_2 in funzione delle grandezze di stato di questo circuito, i_1 e i_2, utilizzando il "vincolo" imposto dal doppio bipolo adinamico. Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha

$$v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 + e_{01}, \tag{45}$$

$$v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 + e_{02}, \tag{46}$$

dove R_{ij} sono gli elementi della matrice delle resistenze del doppio bipolo, descritta nel § **5.7.1**, quando tutti i generatori ideali sono <u>spenti</u>. Il contributo degli eventuali generatori ideali presenti è portato in conto attraverso i due termini "noti" e_{01} e e_{02}: e_{01} e e_{02} sono, rispettivamente, le tensioni della porta "1" e della porta "2" quando esse sono entrambe <u>aperte</u> e i generatori ideali sono <u>accessi</u>. Le relazioni (45) e (46) rappresentano un'altra delle possibili estensioni del teorema di Thévenin-Norton ai doppi bipolo.
Combinando le equazioni (43) e (44) con le equazioni (45) e (46) si ha il sistema di equazioni di stato per un generico circuito *RL* lineare del secondo ordine,

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -R_{11} i_1 - R_{12} i_2 - e_{01}, \tag{47}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -R_{21} i_1 - R_{22} i_2 - e_{02}. \tag{48}$$

7.3 Continuità delle grandezze di stato di un circuito

Si consideri un circuito dinamico lineare con induttori e condensatori tempo invarianti.
Come abbiamo appena mostrato le intensità di corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori possono essere sempre espresse sono combinazioni lineari delle grandezze di stato, delle tensioni generatori ideali di tensione e delle intensità di corrente dei generatori ideali di corrente. I coefficienti delle combinazioni lineari dipendono dai valori delle resistenze dei resistori del circuito.
Le intensità di corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori sono certamente funzioni del tempo discontinue (funzioni generalmente continue [2]) se le tensioni dei generatori ideali di tensione e le intensità di corrente dei generatori ideali di corrente sono funzioni del tempo discontinue (generalmente continue) e/o il circuito contiene interruttori, come, ad esempio, nel circuito di Figura 7.7. Invece, le grandezze di stato, cioè le intensità di corrente degli induttori e le tensioni dei condensatori, sono funzioni continue del tempo se i valori delle tensioni dei generatori ideali di tensione e delle intensità di corrente dei generatori ideali di corrente sono limitati.
Questa proprietà, detta *proprietà di continuità delle variabili di stato*, è molto importante e, come poi vedremo, è molto utile nella soluzione dei circuiti dinamici, e per questo merita di essere approfondita. Essa può essere dimostrata attraverso un ragionamento che è allo stesso tempo semplice e “rigoroso”.

Dimostrazione

In ogni circuito i valori delle tensioni dei condensatori e delle intensità di corrente degli induttori sono limitati: se la tensione (l’intensità di corrente) di un condensatore (induttore) fosse illimitata si avrebbe un’energia illimitata immagazzinata nel condensatore (induttore), il che non può essere mai realizzato. Di conseguenza, se i valori delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e delle intensità di corrente dei generatori indipendenti di corrente

[2] Una discontinuità di prima specie di una funzione reale f(t) è un punto $t = \hat{t}$ tale che $f(\hat{t}^+)$ e $f(\hat{t}^-)$ esistono (finiti) e $f(\hat{t}^+) \neq f(\hat{t}^-)$; la differenza $f(\hat{t}^+) - f(\hat{t}^-)$ è il salto di discontinuità di f a $t = \hat{t}$. f(t) si dice generalmente continua in un intervallo I se e solo se f(t) è continua in I eccetto che in un numero finito di punti in cui ha discontinuità di prima specie.

sono <u>limitati</u>, allora anche i valori delle intensità di corrente dei condensatori e delle tensioni degli induttori sono <u>limitati</u> (se si escludono situazioni “patologiche”).
Ora dimostreremo che la tensione di condensatore è una funzione continua del tempo se i valori dell’intensità della corrente elettrica che lo attraversa sono limitati.

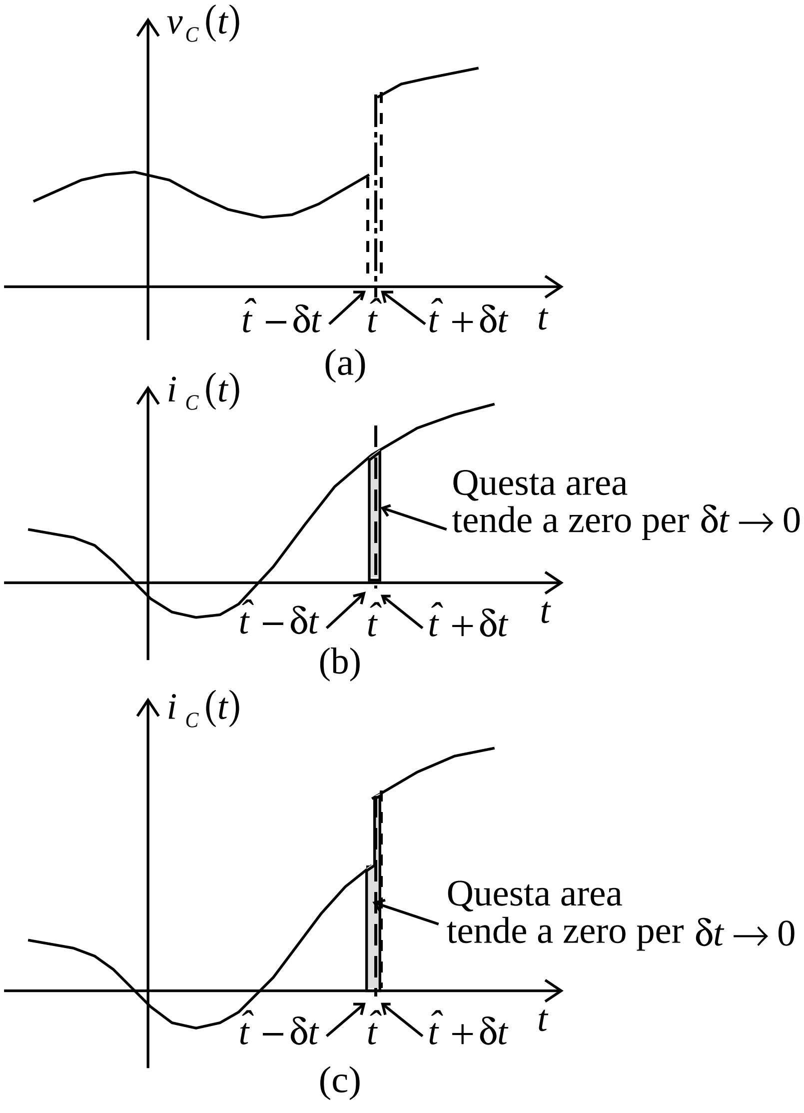

Fig. 7.18 *(a) Andamento temporale di una tensione discontinua; (b) la corrente del condensatore è sempre limitata e (c) può essere discontinua.*

Si assuma che la tensione v_c possa essere discontinua a un certo istante $\hat{t}$, cioè $v(\hat{t}-\delta t) \neq v(\hat{t}+\delta t)$, dove δt è un intervallo di tempo piccolo a piacere, Figura

7.18a. Si consideri la relazione caratteristica del condensatore (tempo-invariante),

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}, \tag{49}$$

e si integrino ambo i membri dell'equazione sull'intervallo temporale $\left(\hat{t}-\delta t, \hat{t}+\delta t\right)$ di lunghezza infinitesima. Si ha

$$v_c\left(\hat{t}+\delta t\right) = \frac{1}{C}\int_{\hat{t}-\delta t}^{\hat{t}+\delta t} i_c(\tau)d\tau + v_c\left(\hat{t}-\delta t\right). \tag{50}$$

L'integrale definito nell'espressione (50) è uguale a zero perché δt è un intervallo di tempo piccolo a piacere e la corrente $i_c = i_c(t)$ è limitata. Questo risultato è evidente se interpretiamo geometricamente l'integrale definito che appare nella (50), vedi Figure 7.18b e 7.18c. Di conseguenza deve essere necessariamente $v_c\left(\hat{t}+\delta t\right) = v_c\left(\hat{t}-\delta t\right)$. Questo risultato vale per ogni istante $\hat{t}$.
In conclusione, abbiamo mostrato che la tensione del condensatore è continua perché i valori delle tensioni dei generatori indipendenti di tensione e i valori delle correnti dei generatori indipendenti di corrente sono limitati.
Il lettore dimostri, ripercorrendo il ragionamento che abbiamo appena sviluppato, che l'intensità di corrente di un induttore è una funzione continua del tempo se i valori della sua tensione sono limitati.

Osservazione

Siccome la tensione del condensatore e la corrente nell'induttore sono continue, sia l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore $W_C(t) = Cv_C^2(t)/2$, che l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore $W_L(t) = Li_L^2(t)/2$ sono funzioni continue e la potenza elettrica assorbita da questi bipoli ($p_C = dW_C/dt$ e $p_L = dW_L/dt$) è limitata.

♦

Queste proprietà di continuità non valgono se il condensatore (l'induttore) è tempo-variante e la funzione che descrive l'andamento temporale della capacità (dell'induttanza) è una funzione generalmente continua. In generale è la carica del condensatore (il flusso dell'induttore) che è continua se la corrente (la tensione dell'induttore) è limitata. In corrispondenza di un punto di discontinuità di prima specie della capacità (del coefficiente di autoinduzione), la tensione del condensatore (la corrente dell'induttore) è discontinua.

♦

Osservazione

Due circuiti accoppiati perfettamente hanno una sola grandezza di stato, vedi § **5.9.3**. Essa è l'intensità della corrente che attraversa l'induttore di induttanza L_1 nel circuito equivalente di Figura 4.34a, $i_{L_1} = i_1 + i_2/n$ (o equivalentemente l'intensità della corrente che attraversa l'induttore di induttanza L_2 nel circuito equivalente di Figura 4.34b, $i_{L_2} = i_2 + ni_1$). Di conseguenza quando l'accoppiamento è perfetto può accadere che le due intensità di corrente i_1 e i_2 siano discontinue, purché sia continua la combinazione $i_{L_1} = i_1 + i_2/n$ (o, equivalentemente, $i_{L_2} = i_2 + ni_1$). Invece, quando l'accoppiamento non è perfetto sia i_1 che i_2 devono essere continue.

♦

7.4 Soluzione di circuiti del primo ordine

I circuiti costituiti da un solo condensatore (o da un solo induttore) e da elementi statici (resistori, trasformatori ideali, amplificatori operazionali, generatori controllati, generatori indipendenti, etc) sono circuiti del <u>primo ordine</u>. Nel precedente paragrafo abbiamo determinato le equazioni di stato di un generico circuito del primo ordine.
In questo paragrafo vengono discusse e risolte le equazioni di stato di circuiti del primo ordine tempo-invarianti (cioè circuiti con parametri costanti nel tempo) e circuiti tempo varianti con interruttori. Ricordiamo che, almeno in parte, abbiamo già affrontato questa questione nel § **2.4**, qui approfondiremo solo alcuni aspetti.

7.4.1 Circuiti del primo ordine tempo-invarianti

Le equazioni di stato (3) e (8) sono del tipo

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = b(t). \tag{51}$$

La (32) è una equazione differenziale ordinaria, del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti e non omogenea. Essa ha infinite soluzioni. Per determinare quella che si realizza nel circuito in esame, bisogna imporre la condizione iniziale

$$x(t_0) = X_0. \tag{52}$$

La soluzione generale dell'equazione (32) è uguale alla somma della soluzione generale $x_o = x_o(t)$ dell'equazione omogenea associata, (cioè l'equazione che si ottiene ponendo $b(t) = 0$ nella (32)),

$$\frac{dx_o}{dt} + \alpha x_o = 0. \tag{53}$$

e di una qualsiasi soluzione, che indichiamo con $x_p(t)$, dell'equazione completa (51),

$$x(t) = x_o(t) + x_p(t). \tag{54}$$

La soluzione generale dell'equazione (53) è

$$x_o(t) = K\, exp[\lambda(t - t_0)]. \tag{55}$$

dove K è una costante arbitraria e λ è la soluzione dell'*equazione caratteristica*

$$\lambda + \alpha = 0 \tag{56}$$

associata all'equazione differenziale omogenea (53). Nell'espressione (55) abbiamo rappresentato la costante arbitraria attraverso il fattore $Ae^{t_0/\tau}$ perché

così risulterà più semplice imporre la condizione iniziale (33) all'istante iniziale t_0, che in generale è diverso da zero.
L'equazione algebrica (56) è ottenuta costruendo il *polinomio caratteristico*

$$p(\lambda) = \lambda + \alpha \tag{57}$$

e imponendo, poi, che sia uguale a zero. Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ associato all'equazione (53) è la somma di due monomi in λ: al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il monomio in λ di grado uno, con lo stesso coefficiente della derivata prima, cioè 1, e al termine non derivato corrisponde il monomio di grado zero in λ, cioè uno, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione incognita, cioè α.
L'integrale generale dell'equazione (51) è

$$x(t) = K\,exp\left[-\left(t - t_0\right)/\tau\right] + x_p(t), \tag{58}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \tag{59}$$

è la costante di tempo del circuito. Essa vale

$$\tau = R_{eq}C \tag{60}$$

per un circuito *RC* e

$$\tau = L/R_{eq} \tag{61}$$

per un circuito *RL*.
La costante di integrazione K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale (52). Così facendo si ottiene

$$K = X_0 - x_p\left(t_0\right) \tag{62}$$

quindi la soluzione è

$$x(t) = [X_0 - x_p(\mathrm{t}_0)]\,exp[-(t-t_0)/\tau] + x_p(t). \qquad (63)$$

La funzione che descrive la soluzione particolare dipende dalla forma della funzione $b = b(t)$ e quindi dall'andamento temporale delle correnti e delle tensioni dei generatori indipendenti.

7.4.2 Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Ricordiamo che, un circuito si dice che è in *evoluzione libera* se è privo di generatori ideale (o se i generatori ideali che contiene sono tutti spenti). Nei circuiti in evoluzione libera è l'energia immagazzinata all'istante iniziale negli elementi dinamici che produce le correnti e le tensioni. Nel circuito *RC* (nel circuito *RL*) con tensione iniziale V_0 (con corrente iniziale I_0), un'energia uguale a $CV_0^2/2$ (uguale a $LI_0^2/2$) è immagazzinata nel condensatore (nell'induttore). È questa l'energia che viene messa in gioco nell'evoluzione libera.

Osservazione

La soluzione dell'equazione omogenea associata coincide con la soluzione del circuito in evoluzione libera. Per questa ragione si dice che il termine $A\,exp(\lambda t)$ rappresenta il *modo naturale di evoluzione* del circuito. La radice λ del polinomio caratteristico prende il nome di *frequenza naturale* del circuito.
Un circuito del primo ordine è descritto da una equazione di stato del primo ordine e quindi il polinomio caratteristico corrispondente è di primo grado. Un circuito del primo ordine ha, quindi, un solo modo naturale e una sola frequenza naturale.

♦

Inoltre, ricordiamo che, un circuito si dice in *evoluzione forzata* se le grandezze di stato del circuito all'istante iniziale sono tutte nulle e, quindi, l'energia inizialmente immagazzinata nel circuito è uguale a zero. È evidente che in questo caso c'è bisogno di generatori ideali per sollecitare il circuito.
Per la linearità del circuito è sempre possibile rappresentare qualsiasi soluzione attraverso la somma di due termini: il *termine di evoluzione libera* e il *termine*

di evoluzione forzata. Nella soluzione (63) c'è un termine dipendente unicamente dalla condizione iniziale (indipendente dall'integrale particolare e quindi dai generatori) e due termini dipendenti solo dall'integrale particolare e quindi dai generatori (indipendenti dalla particolare condizione iniziale).

$$\boxed{x(t) = \underbrace{X_0\, exp\left[-(t-t_0)/\tau\right]}_{\substack{termine\ di \\ evoluzione\ libera}} + \underbrace{\left\{-x_p(t_0)\,exp\left[-(t-t_0)/\tau\right] + x_p(t)\right\}}_{\substack{termine\ di \\ evoluzione\ forzata}}}$$

Il termine dipendente unicamente dalla condizione iniziale è la soluzione del circuito se esso fosse in *evoluzione libera.* Il termine dipendente unicamente dai generatori è la soluzione che si avrebbe se il circuito fosse in *evoluzione forzata.*

7.4.3 Considerazioni energetiche

Siccome le frequenze naturali di un circuito non dipendono dai generatori ideali, ma solo dagli elementi lineari presenti in esso, tutte le loro proprietà possono essere messe in evidenza considerando il circuito in evoluzione libera.
La frequenza naturale di un circuito del primo ordine è una grandezza reale e può essere, come vedremo, positiva, uguale a zero o negativa.
Quando la frequenza naturale è negativa, la costante di tempo è positiva, e lo stato del circuito in evoluzione libera tende a zero con legge esponenziale per $t \rightarrow +\infty$.
Quando la frequenza naturale è zero, l'evoluzione libera è una costante uguale al valore iniziale della grandezza di stato.
L'evoluzione libera diverge esponenzialmente se la frequenza naturale è maggiore di zero (costante di tempo negativa).
Da queste considerazioni risulta evidente che il segno della frequenza naturale caratterizza fortemente la dinamica di un circuito. Sarebbe interessante poterne prevedere il segno senza dover risolvere il circuito. Analizziamo un attimo questa questione.
Consideriamo un circuito *RC* del primo ordine in evoluzione libera (considerazioni analoghe possono essere svolte per il circuito *RL*). Siccome la capacità del condensatore è positiva (stiamo evidentemente considerando un condensatore passivo), la frequenza naturale è minore di zero quando la

conduttanza equivalente è positiva, $R_{eq} > 0$, ed è maggiore di zero quando $R_{eq} < 0$; la frequenza naturale è nulla quando $1/R_{eq} = G_{eq} = 0$. Allora, quando $R_{eq} > 0$ la tensione del condensatore decresce nel tempo e tende a zero con legge esponenziale, quando $1/R_{eq} = G_{eq} = 0$ la tensione resta costante, invece quando $R_{eq} < 0$ la tensione del condensatore cresce nel tempo con legge esponenziale.

Queste proprietà possono essere dedotte anche a partire da un bilancio energetico. Applicando la conservazione delle potenze al circuito *RC* in evoluzione libera si perviene alla seguente equazione

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) = -G_{eq}v^2, \tag{64}$$

che, nel caso del circuito *RL* diventa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -R_{eq}i^2. \tag{65}$$

In entrambe le equazioni il termine a destra rappresenta la potenza assorbita dalla parte "adinamica" del circuito.

Quando il circuito *RC* è costituito di soli elementi strettamente passivi [3], la potenza assorbita dalla parte adinamica del circuito è <u>strettamente maggiore</u> di zero e quindi anche la conduttanza equivalente "vista" dal condensatore (nei circuiti *RL* la resistenza equivalente vista dall'induttore) è <u>strettamente maggiore</u> di zero. Allora, l'energia immagazzinata nel condensatore (nell'induttore) è una funzione decrescente del tempo fino a quando il circuito non si porta nello stato di riposo: l'energia inizialmente immagazzinata degli elementi dinamici è <u>dissipata</u> dagli elementi adinamici durante l'evoluzione libera.

La potenza assorbita dalla parte adinamica e, quindi, la conduttanza equivalente vista dal condensatore nel circuito *RC* (dall'induttore nel circuito *RL*) può

[3] Un bipolo adinamico si dice che è <u>strettamente</u> passivo se nelle condizioni di funzionamento in cui la potenza assorbita è nulla sia la tensione che l'intensità di corrente sono entrambe uguali a zero. Il resistore con resistenza maggiore di zero e il diodo sono due esempi di bipoli strettamente passivi. Un corto circuito o un circuito aperto sono esempi di bipoli passivi ma non strettamente passivi, perchè la potenza da essi assorbita è uguale a zero anche quando la corrente del corto circuito e la tensione del circuito aperto sono diverse da zero. I bipoli adinamici strettamente passivi dissipano l'energia che assorbono.

essere nulla quando gli elementi adinamici non sono tutti strettamente passivi. Ciò accade, ad esempio, quando il condensatore è collegato in serie a un circuito aperto (l'induttore è collegato in parallelo a un corto circuito). Il circuito aperto e il corto circuito sono elementi passivi ma non strettamente passivi. In questo caso l'energia immagazzinata negli elementi dinamici si conserva. Il circuito aperto in serie al condensatore e il corto circuito in parallelo all'induttore possono essere, rispettivamente, un generatore di corrente ideale spento e un generatore di tensione ideale spento, Figura 7.20 (ricordiamoci che stiamo analizzando l'evoluzione libera del circuito, quindi i generatori indipendenti sono tutti spenti).
Infine, la potenza assorbita dalla parte statica e quindi la conduttanza equivalente (la resistenza equivalente nel circuito *RL*) può essere minore di zero se il circuito in evoluzione libera contiene elementi attivi (come, ad esempio, generatori controllati, resistori con resistenza negativa). Quando ciò accade l'energia immagazzinata nel condensatore (nell'induttore) cresce indefinitamente nel tempo.
Dunque l'evoluzione libera di un circuito del primo ordine passivo o tende a zero o al più si mantiene costante per $t \to +\infty$, e quindi tutte le grandezze circuitali si mantengono limitate nel tempo.
A questo punto possiamo introdurre il concetto di *circuito dissipativo*. Un circuito si dice *dissipativo* se nell'evoluzione libera l'energia immagazzinata nell'elemento dinamico tende asintoticamente a zero per $t \to +\infty$. È evidente che un circuito del primo ordine è dissipativo se e solo se la frequenza naturale è strettamente minore di zero (cioè la costante di tempo è strettamente maggiore di zero). In un circuito dissipativo in evoluzione libera l'energia immagazzinata all'istante iniziale viene completamente assorbita dai resistori, e quindi dissipata in energia termica.
Si osservi che un circuito di soli elementi passivi potrebbe non essere dissipativo. Ciò è quanto si verifica quando in serie al condensatore c'è un circuito aperto e in parallelo all'induttore un corto circuito. In questi casi la tensione del condensatore e la corrente nell'induttore si mantengono costanti durante l'evoluzione libera. Circuiti di questo tipo vengono detti *conservativi*.

7.4.4 Regime permanente e transitorio

Si consideri un generico circuito passivo e dissipativo. Si considerino due diverse soluzioni dello stesso circuito che differiscano solo per il valore iniziale della grandezza di stato. La passività del circuito fa si che la differenza tra le due soluzioni rimanga limitata nel tempo sia per $t_0 \to -\infty$ che per $t \to +\infty$, mentre la dissipazione fa si che questa differenza tenda a zero, con legge esponenziale, sia per $t_0 \to -\infty$ che per $t \to +\infty$. Quando $t_0 \to -\infty$ è come se il circuito iniziasse a funzionare all'istante "remoto" $t_0 \to -\infty$.

È evidente che, dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo (ad esempio, cinque volte la costante di tempo), il comportamento del circuito è indipendente dallo stato iniziale. Questa è una proprietà generale dei circuiti lineari, tempo invarianti, passivi e dissipativi, che non dipende da come essi sono costituiti in dettaglio. Dal dettaglio della loro costituzione dipende solo il tempo necessario per cancellare l'influenza del valore iniziale dello stato.

Il regime permanente è la soluzione che si instaurerebbe nel circuito al generico istante attuale t se il circuito avesse iniziato a funzionare all'istante iniziale $t_0 \to -\infty$. Esso non dipende dal particolare stato iniziale del circuito ed è, in generale, diverso da zero per $t \to +\infty$ (ovviamente, in presenza di generatori ideali).

E', allora, evidente che conviene scegliere come soluzione particolare proprio la soluzione di regime permanente. Indichiamo con $x_r = x_r(t)$ la soluzione di regime permanente del circuito in esame. La soluzione del circuito vale

$$x(t) = \left[X_0 - x_r(t_0)\right] exp\left[-(t - t_0)/\tau\right] + x_r(t). \tag{66}$$

Per definizione, abbiamo $\lim_{t_0 \to -\infty} x(t) = x_r(t)$. Al termine $x_r(t)$ si dà anche il nome di *termine di regime permanente*.

Si consideri ora il caso in cui l'istante iniziale t_0 sia al finito. Il termine esponenziale tende asintoticamente a zero per $t \to +\infty$, indipendentemente dal valore che lo stato e l'integrale particolare assumono all'istante iniziale t_0. A questo termine si dà il nome di *termine transitorio*.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{term. transitorio}: x_{tran}(t) \equiv \left[X_0 - x_r(t_0)\right] exp\left[-(t - t_0)/\tau\right] \\ \text{term. di regime}: x_r(t) \equiv \lim_{t_0 \to -\infty} x(t) \end{array}}$$

Ripetiamo alcune delle considerazioni già sviluppate nel § **2.4** sull'andamento temporale del termine transitorio. Il termine transitorio può essere rappresentato graficamente (Figura 7.19) sfruttando le seguenti osservazioni:

- la tangente in $t = t_0$ alla curva, che rappresenta $x_{tran}(t)$, passa per i punti $[t_0, X_0 - x_p(t_0)]$ e $[t_0 + \tau, 0]$;
- dopo un intervallo di tempo pari alla costante di tempo τ, l'ampiezza (in valore assoluto) del termine transitorio è circa il 37% del valore iniziale $|X_0 - x_p(t_0)|$;

- dopo un intervallo pari a cinque costanti di tempo, $x_{tran}(t)$ è praticamente uguale a zero ($e^{-5} \cong 0,007$). In pratica si può assumere che il funzionamento di regime si instaura dopo un intervallo di tempo pari all'incirca a cinque costanti di tempo.

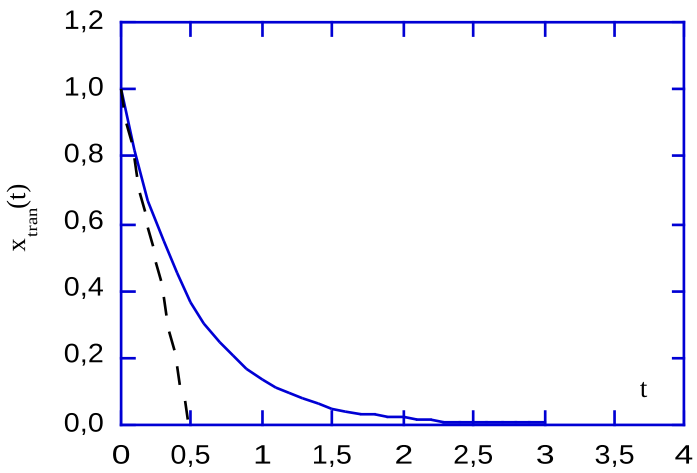

Fig. 7.19 *Andamento del termine transitorio (l'istante iniziale è $t_0 = 0$).*

In conclusione il funzionamento di regime può essere realizzato <u>se e solo se</u> il circuito è dissipativo, non basta la sola passività.

L'evoluzione di un circuito RC (o RL) del primo ordine <u>dissipativo</u> tende asintoticamente alla soluzione di regime indipendentemente dal valore iniziale della grandezza di stato.

Osservazione

La tensione del condensatore del circuito illustrato in Figura 7.20a e l'intensità di corrente dell'induttore del circuito illustrato in Figura 7.20b valgono, rispettivamente:

$$v(t) = v(t_0)) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} j(\tau)d\tau, \qquad (67)$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau. \qquad (68)$$

Entrambi i circuiti sono conservativi; essi hanno costante di tempo uguale a infinito, $\tau = \infty$, cioè frequenza naturale uguale a zero. Pertanto il termine dipendente dal valore iniziale dello stato non svanisce, ma permane indefinitamente in entrambi i circuiti. A causa dell'assenza di bipoli dissipativi i termini di evoluzione libera non tendono asintoticamente a zero per $t \to +\infty$, ma restano costanti nel tempo (ricordiamo che nell'evoluzione libera il generatore di corrente indipendente si comporta come un circuito aperto e il generatore di tensione indipendente si comporta come un corto circuito). In questi casi il comportamento asintotico dei due circuiti dipende anche dal valore iniziale dello stato e quindi non ha più senso parlare di regime.

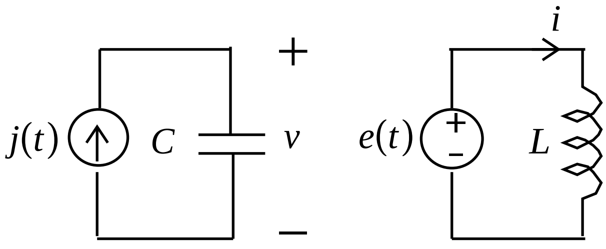

Fig. 7.20 *Circuiti dinamici elementari.*

♦

7.4.5 Regime stazionario e regime sinusoidale

Il termine di regime dipende, oltre che dai parametri caratteristici del circuito, anche dalla forma d'onda dei generatori. Abbiamo già affrontato questa questione nel Capitolo 2 e nel Capitolo 5. Qui riassumeremo i risultati principali.

Regime stazionario

Si consideri un circuito *RL* o *RC* del primo ordine con soli generatori stazionari (cioè costanti nel tempo). In questo caso anche la tensione a vuoto e_0

del circuito equivalente è costante nel tempo e, quindi, il regime che si instaura nel circuito è stazionario.
La soluzione di un circuito *RC* (o *RL*) in regime stazionario può essere ottenuta per ispezione diretta. Quando il circuito funziona in regime stazionario, la tensione del condensatore (la corrente dell'induttore) è costante, quindi il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto (l'induttore come se fosse un corto circuito). Pertanto, per calcolare la soluzione di regime stazionario di un circuito dinamico, si può risolvere il circuito resistivo ottenuto considerando al posto del condensatore un circuito aperto (al posto dell'induttore un corto circuito).

Quando i generatori sono stazionari, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso stazionario, se il circuito è dissipativo.

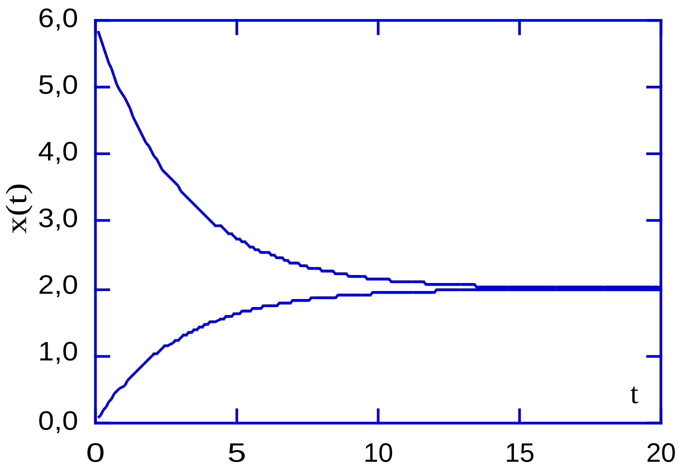

Fig. 7.21 *Per $t > 15$ entrambe le soluzioni, relative a due condizioni iniziali diverse, raggiungono il valore di regime.*

In Figura 7.21 viene riportato l'andamento dello stato di un circuito del primo ordine per due condizioni iniziali diverse quando i generatori sono costanti. Per $t > 15$ la soluzione in entrambi i casi ha raggiunto, praticamente, il regime stazionario.

- Regime sinusoidale

Si consideri un circuito *RL* o *RC* del primo ordine con soli generatori sinusoidali isofrequenziali (le frequenze, e quindi le pulsazioni, dei generatori sinusoidali sono uguali) a pulsazione ω. Nel caso in esame, anche la tensione a vuoto $e_o(t)$ è una funzione sinusoidale con pulsazione ω (essa è combinazione lineare delle tensioni dei generatori di tensione e delle correnti dei generatori di corrente indipendenti). Di conseguenza, il regime che si instaura nel circuito è sinusoidale a pulsazione ω, quindi la soluzione di regime può essere determinata applicando il metodo simbolico.

Quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori, se il circuito è dissipativo.

In Figura 7.22 viene riportato l'andamento dello stato di un circuito del primo ordine per due condizioni iniziali diverse quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali. Per t>5 entrambe le soluzioni raggiungono, praticamente, il regime sinusoidale che si instaura nel circuito.

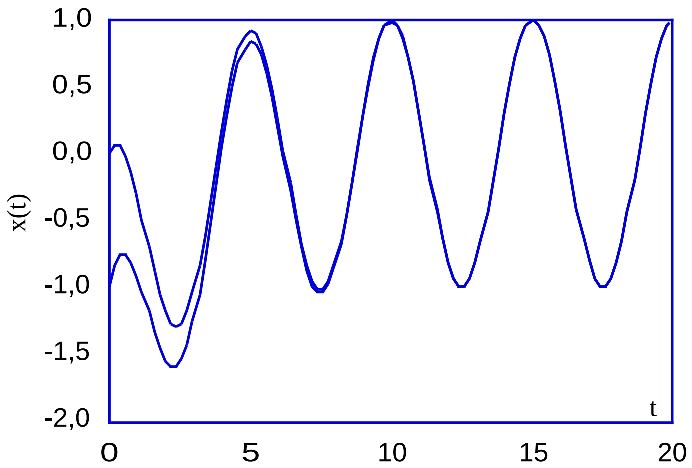

Fig. 7.22 *Per t>10 entrambe le soluzioni, relative a due condizioni iniziali diverse, hanno praticamente raggiunto il funzionamento di regime.*

7.4.6 Regime periodico e regime aperiodico

Quando il circuito *RC* (o *RL*) contiene generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni la tensione a vuoto $e_0(t)$ è una funzione periodica o aperiodica e, di conseguenza, il regime risultante è periodico o aperiodico. Il regime è periodico se tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, invece, è aperiodico se non tutte le pulsazioni sono commensurabili tra loro, vedi **§ 6.9**.

Esercizio

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 7.1 e si assuma che $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = R_3 = 2\Omega$, $C = 2\mu F$, $e(t) = E_m \, sin(\omega t)$, $j(t) = J_0$, $E_m = 0.8$ V, $J_0 = 6/5$ A, $\omega = 10^5 \; rad/s$, $t_0 = 0$ e $V_0 = -1V$. Si determini la tensione del condensatore. Il circuito è descritto dall'equazione di stato

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3 \cdot 10^6}{16} v = 10^6 \cdot \left[3/8 + 0.1 \, sin\left(10^5 t\right)\right]. \tag{69}$$

L'integrale generale dell'equazione (69) è

$$v(t) = K \, exp(-t/\tau) + v_r(t), \tag{70}$$

dove la costante di tempo vale $\tau = 5.33\mu s$ e la soluzione particolare $v_r(t)$ è il termine di regime; la costante K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale $v(0) = -1$.
Il termine di regime $v_r(t)$ può essere determinato applicando la sovrapposizione degli effetti. Così facendo si ottiene

$$v_r(t) \cong 2.0 + 0.9 \, cos\left(10^5 \mathrm{t} - 2.1\right), \tag{71}$$

Il primo termine è la soluzione di regime stazionario del circuito quando agisce solo il generatore di corrente stazionario e il secondo termine è la soluzione di regime sinusoidale quando agisce solo il generatore di tensione sinusoidale. La soluzione di regime stazionaria può essere determinata risolvendo il circuito resistivo equivalente ottenuto sostituendo al condensatore un circuito aperto (in regime stazionario il condensatore si comporta da circuito aperto). La soluzione di regime sinusoidale può essere determinata applicando il metodo simbolico descritto nel Capitolo 6. Dalla sovrapposizione dei due regimi si ottiene un regime periodico con periodo $T = 6.8\mu s$ (Figura 7.23).
Sostituendo la (71) nella (70) e imponendo la condizione iniziale, si ottiene $K = -2.5V$ e quindi la soluzione del problema è

$$v(t) \cong -2.5 exp(-t/\tau) + \left[2.0 + 0.9 \, cos\left(10^5 t - 2.1\right)\right]. \tag{72}$$

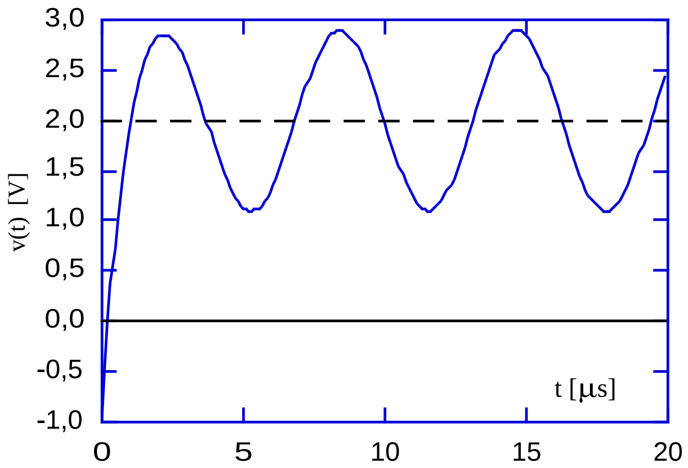

Fig. 7.23 *Circuito con regime periodico.*

♦

7.4.7 Circuito con generatore impulsivo

Si consideri il circuito di Figura 7.24 e si determini la tensione e la corrente del condensatore quando la tensione del generatore ha l'andamento riportato in Figura 7.24: $e(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza E_0 e durata T.

L'equazione di stato di questo circuito è:

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ E_0 & 0 < t < T, \\ 0 & T < t; \end{cases} \qquad (73)$$

$\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito. Pur essendo la tensione del generatore discontinua all'istante $t = 0$ e all'istante $t = T$, la tensione del condensatore deve essere continua perché il generatore di tensione è limitato.

Siccome la tensione del generatore è uguale a zero per $t < 0$, il circuito è a riposo per $t < 0$, quindi la tensione del condensatore a un istante immediatamente prima di $t = 0$ è nulla, $v(0^-) = 0$. Per la continuità della tensione del condensatore abbiamo

$$v(0^-) = v(0^+) = 0\,. \tag{74}$$

Nell'intervallo $(0,T)$ la tensione del generatore è costante, $e(t) = E_0$. Pertanto per $(0,T)$ la tensione del condensatore è soluzione dell'equazione

$$\tau\frac{dv}{dt} + v = E_0\,, \tag{75}$$

con la condizione iniziale

$$v(0^+) = 0\,. \tag{76}$$

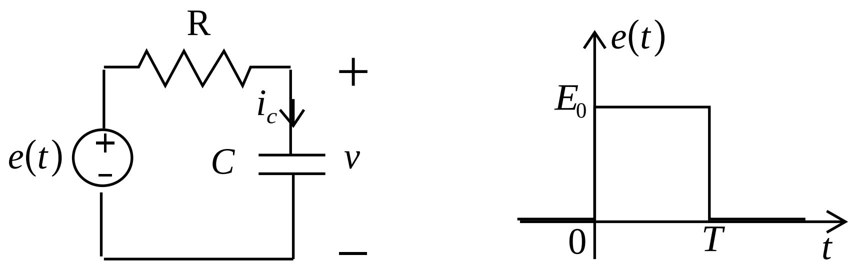

Fig. 7.24 *Circuito RC con impulso rettangolare.*

La soluzione dell'equazione (73) con la condizione iniziale (74) è

$$v(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{77}$$

Questo è l'andamento della tensione del condensatore nell'intervallo $(0,T)$. esso è l'andamento della tensione nella fase di carica del condensatore. Siccome la tensione del condensatore è una funzione continua, si ha

$$v(T^+) = v(T^-) = E_0\left(1 - e^{-T/\tau}\right). \tag{78}$$

Per $t > T$ il circuito è in evoluzione libera, quindi si ha

$$v(t) = E_0\left(1 - e^{-T/\tau}\right)e^{-(t-T)/\tau}\,. \tag{79}$$

Riassumendo, la tensione $v(t)$ del circuito illustrato in Figura 7.24 vale

$$v(t)=\begin{cases}0 & t\le 0,\\ E\left(1-e^{-t/\tau}\right) & 0\le t\le T,\\ E\left(1-e^{-T/\tau}\right)e^{-(t-T)/\tau} & t\ge T.\end{cases} \qquad (80)$$

Se $T/\tau >> 1$ (ad esempio, $T/\tau = 10$) abbiamo $v\left(T^+\right)=v\left(T^-\right)\cong E_0$, cioè la fase di carica viene completata nell'intervallo di tempo in cui il generatore è acceso. In Figura 7.22 viene mostrato l'andamento temporale della tensione del condensatore per un fissato valore di E_0 e diversi valori di T.

Al decrescere della durata dell'impulso il picco della tensione del condensatore decresce. Per $T = 4\tau$ il circuito praticamente raggiunge il regime stazionario prima che il generatore di tensione si spenga; infatti abbiamo $v_{max} = v(T = 4\tau) \cong E_0$. Per $T = \tau/2$ il circuito non riesce a raggiungere il regime stazionario prima che il generatore di tensione si spenga; infatti abbiamo $v_{max} = v(T) \cong 0.4E_0$.

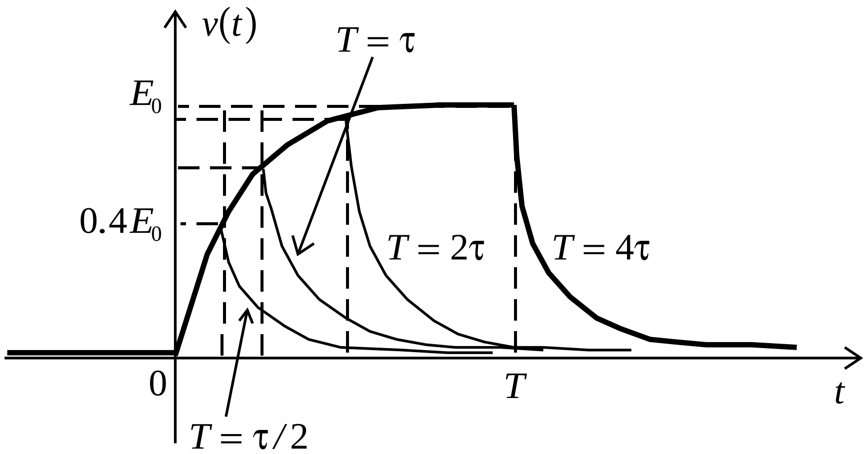

Fig. 7.25 *Andamento temporale della tensione del condensatore per fissato valore di E_0 e diversi valori di T.*

Si osservi che nel caso in esame è $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)d\tau = E_0 T$ (l'area dell'impulso rettangolare), quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)d\tau \to 0$ per $T\to 0$. Quanto più corta è la durata dell'impulso, a parità di ampiezza massima, tanto meno è "efficace" la sua azione.

Cosa accade se applichiamo un impulso di tensione con un'ampiezza che cresce al decrescere della sua durata?

Consideriamo, ora, un generatore di tensione in grado di generare un impulso rettangolare $e = \Pi_\Delta(t)$ del tipo illustrato in Figura 7.26: l'ampiezza $(1\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{s})/\Delta$ è inversamente proporzionale alla durata temporale Δ. È evidente, allora, che è $\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)d\tau = 1$ indipendentemente dal valore della durata Δ. Inoltre, si assuma che la durata temporale Δ sia diversa da zero ma arbitrariamente piccola e, quindi, l'ampiezza arbitrariamente grande.

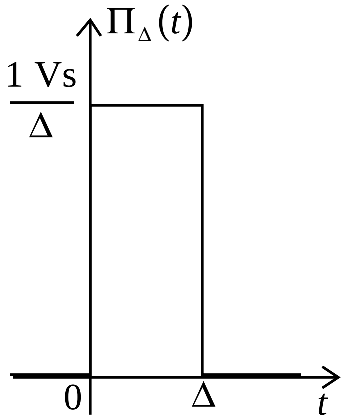

Fig. 7.26 *Impulso rettangolare di ampiezza* $(1\,\mathrm{Vs})/\Delta$.

Indichiamo con il simbolo $h_\Delta(t)$ la funzione che descrive la tensione del condensatore per un generico valore di Δ. Abbiamo

$$h_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ \dfrac{1}{\Delta}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & 0 \le t \le \Delta, \\ \dfrac{1}{\Delta}\left(1 - e^{-\Delta/\tau}\right)e^{-(t-\Delta)/\tau} & t \ge \Delta. \end{cases} \tag{81}$$

Cosa accade quando $\Delta \to 0$? Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di $\Delta = 0$

$$1 - e^{-\Delta/\tau} = 1 - \left[1 - \frac{\Delta}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{\Delta}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2 + \ldots, \tag{82}$$

dalla (81) abbiamo

$$h_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ \left[\frac{1}{\tau}\frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + \ldots \right] & 0 \le t \le \Delta, \\ \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2 + \ldots \right] e^{-(t-\Delta)/\tau} & t \ge \Delta. \end{cases} \tag{83}$$

Si osservi che per $(\Delta/\tau) << 1$ l'andamento della tensione nell'intervallo $(0,\Delta)$ è, con buona approssimazione, lineare nel tempo, Figura 7.24,

$$h_\Delta(t) \cong \frac{1}{\Delta}\left(\frac{t}{\tau}\right) \text{ per } 0 \le t \le \Delta \,. \tag{84}$$

La pendenza della corrispondente retta tende all'infinito per $\Delta \to 0$. Nel limite per $\Delta \to 0$ abbiamo

$$\lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0^-, \\ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} & t \ge 0^+, \end{cases} \tag{85}$$

ovvero

$$h(t) \equiv \lim_{\Delta \to 0} h_\Delta(t) = u(t)\left(\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right), \tag{86}$$

dove $u = u(t)$ è la funzione *gradino unitario di Heaviside*, così definita

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^-, \\ 1 & t > 0^+. \end{cases} \tag{87}$$

Nel limite di $\Delta \to 0$ la tensione del condensatore è discontinua $t = 0$, Figura 7.27: il suo valore è zero all'istante $t = 0^-$ ed è uguale a $1/\tau$ all'istante $t = 0^+$. Pur essendo per $\Delta \to 0$ la durata dell'applicazione della sollecitazione sempre più piccola, l'intensità di quest'ultima cresce come $1/\Delta$, e quindi è in grado di modificare istantaneamente lo stato del circuito. Per t>0 il circuito è in evoluzione libera.

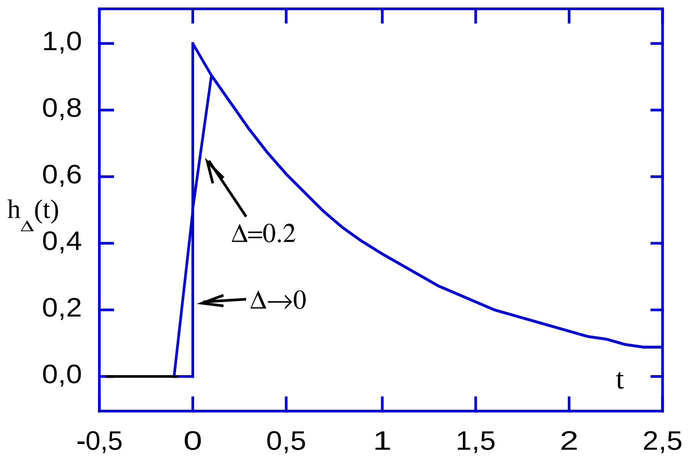

Fig. 7.27 *Andamento temporale della tensione del condensatore quando l'ingresso è l'impulso rappresentato in Figura 7.24 per* $\Delta/\tau = 0.2$ *e* $\Delta \rightarrow 0$.

Osservazione

Si consideri la successione di funzioni $\Pi_\Delta(t)$ quando $\Delta \rightarrow 0$. È evidente che $\Pi_\Delta(t)$ gode delle seguenti proprietà per $\Delta \rightarrow 0$:

- è nulla per qualsiasi t, eccetto che in un intorno (destro) arbitrariamente piccolo di $t = 0$;
- non ha valore finito in $t = 0$;
- inoltre, l'integrale definito di $\Pi_\Delta(t)$ sull'intervallo $(-\infty,\infty)$ vale uno per ogni valore di Δ, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\Delta(\tau) d\tau = 1$.

La forma d'onda limite $\lim\limits_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_\Delta(t)$ è un modo per realizzare un impulso di Dirac $\delta(t)$, definito dalle proprietà

$$\delta(t) = \begin{cases} non \;\; limitata & t = 0, \\ 0 & t \neq 0, \end{cases} \tag{88}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \tag{89}$$

È immediato verificare che la (85) (o (86) coincide proprio con la tensione del condensatore che si avrebbe nel caso in cui la tensione del generatore di tensione nel circuito di Figura 7.24 fosse un impulso di Dirac unitario applicato all'istante $t = 0$,

$$e(t) = (1 \text{ Vs})\delta(t). \tag{90}$$

L'ampiezza di un impulso di Dirac unitario di tensione è pari a $1 \text{ V} \cdot \text{s}$, cioè, è omogenea dimensionalmente con un flusso di campo magnetico. Ciò è dovuto al fatto che dovendo essere verificata la (89), i valori della funzione $\delta(t)$ sono omogenei con s^{-1}.
La corrente del condensatore può essere espressa in funzione della tensione del condensatore e del generatore attraverso la relazione:

$$i_c(t) = \frac{\delta(t) - v(t)}{R}. \tag{91}$$

Si osservi che la corrente contiene un termine che è direttamente proporzionale a un impulso di Dirac.
D'altra parte dalla relazione caratteristica del condensatore abbiamo

$$v\left(0^+\right) = v\left(0^-\right) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau)d\tau. \tag{92}$$

Questa equazione è stata ottenuta facendo l'integrale definito, sull'intervallo infinitesimo $\left(0^-, 0^+\right)$, di ambo i membri dell'equazione caratteristica del condensatore. Sostituendo la (91) nella (92) abbiamo,

$$v\left(0^+\right) = v\left(0^-\right) + \frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau - \frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} v(\tau)d\tau. \tag{93}$$

La tensione del condensatore è certamente limitata (altrimenti l'energia immagazzinata potrebbe essere infinita), quindi il secondo integrale nella (92) è uguale a zero; inoltre, per definizione di impulso di Dirac $\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 1$. Infine, il circuito è a riposo prima che il generatore di tensione agisca, $v\left(0^-\right) = 0$. In conseguenza di tutto ciò dalla (93) abbiamo

$$v\left(0^{+}\right)=\frac{1}{RC}=\frac{1}{\tau}. \tag{94}$$

Per $t \geq 0^{+}$ il circuito è in evoluzione libera e, quindi,

$$v(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \text{ per } t>0. \tag{95}$$

♦

Esercizio

Si determini la tensione dell'induttore per il circuito rappresentato in Figura 7.28.

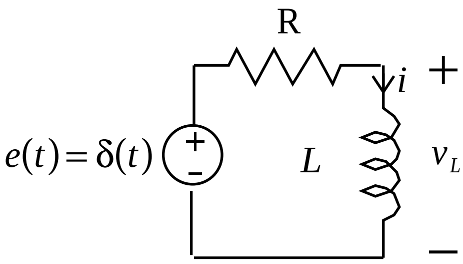

Fig. 7.28 *Circuito RL con generatore impulsivo.*

♦

7.4.8 Circuito tempo-variante con interruttore

Si consideri il circuito descritto in Figura 7.7. Esso, pur essendo tempo variante, può essere analizzato usando le tecniche appena descritte. Ciò è possibile perché per $-\infty < t \leq T^{-}$, cioè prima dell'apertura dell'interruttore, il circuito è tempo-invariante e per $T^{+} \leq t < +\infty$, cioè dopo l'apertura dell'interruttore, il circuito è di nuovo tempo-invariante. La resistenza equivalente del bipolo di Thévenin che descrive la parte statica del circuito è una funzione del tempo la cui espressione è

$$R_{eq}(t)=\begin{cases} R & t<T, \\ R/2 & t>T; \end{cases} \tag{96}$$

anche la tensione a vuoto è una funzione del tempo la cui espressione è data da

$$e_0(t) = \begin{cases} E/2 & t < T, \\ E & t > T. \end{cases} \tag{97}$$

Si osservi che, pur essendo costante la tensione del generatore indipendente di tensione presente nel circuito di Figura 7.6a, la tensione a vuoto del bipolo equivalente di Thévenin dipende dal tempo a causa dell'interruttore. Considerazioni analoghe valgono per la resistenza equivalente.
L'equazione di stato è per $-\infty < t < +\infty$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_{eq}(t)C} v = \frac{e_0(t)}{R_{eq}(t)C}. \tag{98}$$

Per $t \le T^-$ il circuito è tempo-invariante ed è alimentato con un generatore stazionario. A un qualsiasi istante di tempo finito, minore di zero, il circuito è in regime stazionario perché sta funzionando dall'istante "remoto" $t_0 \to -\infty$ ed è dissipativo. La soluzione stazionaria per $t \le T^-$ vale

$$v = \frac{E}{2}. \tag{99}$$

La (99) può essere ottenuta per ispezione diretta del circuito riportato in Figura 7.7. Quando il circuito è in regime stazionario la tensione del condensatore è costante e quindi la corrente che in esso circola è uguale a zero. Pertanto il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto.
All'istante $t = T$ si apre l'interruttore e la struttura del circuito cambia. La tensione del condensatore è continua perché il generatore di tensione ha un'ampiezza limitata, di conseguenza abbiamo:

$$v(T^+) = v(T^-) = \frac{E}{2}. \tag{100}$$

Per $T^+ \le t < +\infty$ il circuito è di nuovo tempo-invariante e la tensione del generatore indipendente di tensione è costante. In questa situazione l'equazione di stato è

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{RC}v = \frac{2E}{RC}. \qquad (101)$$

La soluzione dell’equazione (101) deve verificare la condizione iniziale

$$v(T^+) = \frac{E}{2}. \qquad (102)$$

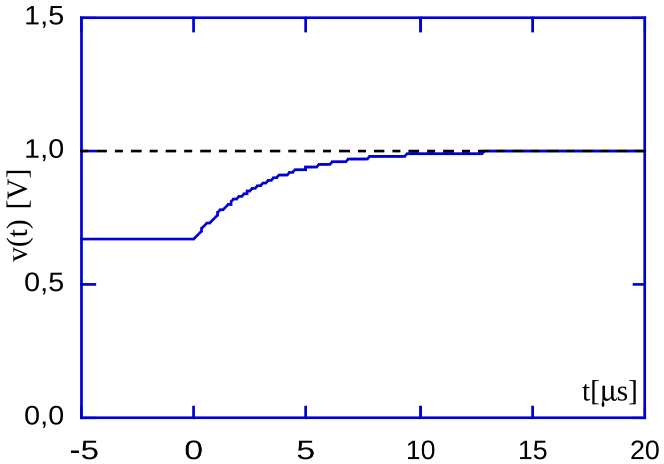

Fig. 7.29 *Circuito RL con generatore impulsivo.*

La soluzione generale dell’equazione (101) è

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} + E. \qquad (103)$$

Per $t > T$ il valore della soluzione stazionaria del circuito è uguale ad E. La costante K deve essere determinata imponendo la condizione iniziale (102),

$$\frac{E}{2} = Ke^{-T/\tau} + E \;\Rightarrow K = -\frac{E}{2}e^{T/\tau}. \qquad (104)$$

Pertanto la soluzione è data da

$$v(t) = \frac{E}{2}\left[2 - e^{-(t-T)/\tau}\right]. \qquad (105)$$

Riassumendo, la soluzione del circuito tempo-variante illustrato in Figura 7.6a vale

$$v(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & t\le T^-,\\ \dfrac{E}{2}\left[2-e^{-(t-T)/\tau}\right] & t\ge T^+.\end{cases} \tag{106}$$

In Figura 7.29 viene illustrato l'andamento temporale della tensione del condensatore per $E=1$ e $RC=1$ μs.

Esercizio

Si determini la tensione del condensatore del circuito tempo-variante di Figura 7.6 quando l'andamento temporale della tensione del generatore è quello descritto in Figura 7.30.

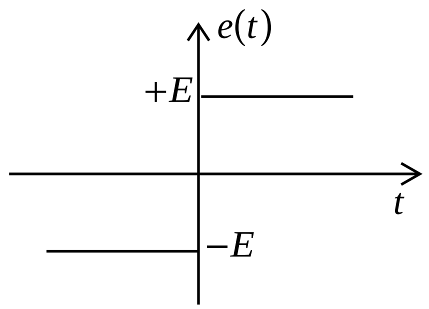

Fig. 7.30 *Andamento temporale della tensione* $e(t)$.

♦

7.5 Soluzione di circuiti del secondo ordine

I circuiti costituiti da due elementi dinamici sono i cosiddetti circuiti del <u>secondo ordine</u>. Nei § **7.2.3** e **7.2.4** abbiamo determinato le equazioni di stato di un generico circuito del secondo ordine. In questo paragrafo vengono discusse e risolte le equazioni di stato di circuiti del secondo ordine tempo-invarianti. Ricordiamo che, almeno in parte, abbiamo già affrontato questa questione nel § **2.6**, qui ne approfondiremo solo alcuni aspetti.

Le equazioni di stato per questi circuiti si riducono alla forma canonica

$$d_1 \frac{dx_1}{dt} = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + g_1(t), \tag{107}$$

$$d_2 \frac{dx_2}{dt} = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + g_2(t). \tag{108}$$

Per i circuiti *RLC* del secondo ordine x_1 e x_2 rappresentano, rispettivamente, la tensione del condensatore e l'intensità di corrente dell'induttore, i coefficienti d_1 e d_2 sono, rispettivamente, i valori della capacità e dell'induttanza e i coefficienti a_{ij} sono gli elementi della matrice ibrida del doppio bipolo adinamico, quando i generatori ideali sono spenti, vedi § **7.2.3**, (24) e (25); inoltre, g_1 e g_2 portano in conto la presenza dei generatori ideali eventualmente presenti.
Per i circuiti *RC* (*RL*) del secondo ordine x_1 e x_2 rappresentano le tensioni (intensità di corrente) dei due condensatori (induttori), i coefficienti d_1 e d_2 sono i valori delle due capacità (induttanze) e i coefficienti a_{ij} sono gli elementi della matrice delle conduttanze (resistenze) del doppio bipolo adinamico, quando i generatori ideali sono spenti, vedi § **7.2.4**; inoltre, g_1 e g_2 portano in conto la presenza dei generatori ideali eventualmente presenti, vedi (38) e (39) (vedi, (45) e (46)).
Questo sistema deve essere risolto con condizioni iniziali assegnate,

$$x_1(t_0) = X_{10}, x_2(t_0) = X_{20}. \tag{109}$$

Il sistema di equazioni (107) e (108) può essere risolto in due modi diversi. Il primo consiste nel ridurlo a una equazione scalare del secondo ordine. L'altro metodo consiste nel risolvere direttamente le equazioni di stato, usando gli autovalori e gli autovettori della matrice dinamica del sistema. Noi useremo, in questa introduzione, il primo metodo.
Si scelga di ridurre il sistema a una equazione scalare, ad esempio, quella che ha come incognita $x_1 = x_1(t)$. Dal sistema di equazioni (107) e (108) si ottiene per $x_1(t)$ l'equazione differenziale scalare lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx_1}{dt} + \omega_r^2 x_1 = f(t). \tag{110}$$

dove

$$\alpha \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{a_{11}}{d_1} + \frac{a_{22}}{d_2}\right), \tag{111}$$

$$\omega_r^2 \equiv \frac{1}{d_1 d_2}\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right), \tag{112}$$

e

$$f \equiv -\frac{a_{22}}{d_1 d_2} g_1 + \frac{a_{12}}{d_1 d_2} g_2 + \frac{a_{11}}{d_1}\frac{dg_1}{dt}. \tag{113}$$

L'equazione scalare del secondo ordine (110) deve essere risolta con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= X_{10}, \\ \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=t_0} &= \dot{X}_{10}, \end{aligned} \tag{114}$$

dove

$$\dot{X}_{10} = -\frac{1}{d_1}\left[a_{11}X_{10} + a_{12}X_{20} - g_1(t_0)\right]. \tag{115}$$

La condizione iniziale per la derivata prima di $x_1(t)$ è stata ottenuta utilizzando l'equazione (107) e le condizioni iniziali per lo stato. Una volta determinata la soluzione del problema di Cauchy definito dalle (110) e (114), usando l'equazione (107) è possibile ottenere l'altra grandezza di stato, cioè $x_2(t)$, attraverso delle semplici operazioni algebriche e di derivazione.
Abbiamo già affrontato un problema di questo tipo nel § **2.6**. Qui riassumiamo i risultati più importanti. L'integrale generale dell'equazione scalare (110) è dato da

$$x_1(t) = x_l(t) + x_p(t), \tag{116}$$

dove $x_p(t)$ è una qualsiasi soluzione particolare dell'equazione (110) e $x_l(t)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (110),

$$\frac{d^2 x_l}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx_l}{dt} + \omega_r^2 x_l = 0. \tag{117}$$

Ricordiamo che questa equazione descrive l'evoluzione libera del circuito. Si consideri il *polinomio caratteristico* dell'equazione differenziale omogenea (117); esso è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_r^2. \tag{118}$$

E' costituito dalla somma di tre monomi in λ: al termine della (117) in cui compare la derivata seconda corrisponde il monomio in λ di grado due con lo stesso coefficiente della derivata seconda, cioè λ^2; al termine in cui compare la derivata prima corrisponde il monomio in λ di grado uno con lo stesso coefficiente della derivata prima, cioè $2\alpha\lambda$; infine al termine non derivato corrisponde il monomio di grado zero, con lo stesso coefficiente che moltiplica la funzione incognita, cioè ω_r^2.
Le radici del polinomio sono le cosiddette *frequenze naturali* del circuito e valgono:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_+ \\ \lambda_-\end{matrix}\right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_r^2}. \tag{119}$$

Se $\alpha^2 \neq \omega_r^2$ le frequenze naturali sono distinte: sono reali per $\alpha^2 > \omega_r^2$ e complesse coniugate per $\alpha^2 < \omega_r^2$. Invece, sono reali e coincidenti per $\alpha^2 = \omega_r^2$. Quando le frequenze naturali sono complesse coniugate possiamo esprimerle come

$$\lambda_\pm = -\alpha \pm i\omega_d, \tag{120}$$

dove

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_r^2 - \alpha^2}. \tag{121}$$

Allora, la soluzione generale dell'equazione (117) è, vedi § **2.6.1**,

$$x_l(t) = \begin{cases} \left(K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e reali}, \\ \left[A + B(t-t_0)\right] e^{-\alpha(t-t_0)} & \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha, \\ Ke^{-\alpha t} cos\left[\omega_d (t-t_0)t + \gamma\right] & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e compl. coniugate}, \end{cases} \tag{122}$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione (110) è

$$x_1(t) = \begin{cases} \left(K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)}\right) + x_p(\mathrm{t}) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e reali}, \\ \left[A + B(t-t_0)\right] e^{-\alpha(t-t_0)} + x_p(\mathrm{t}) & \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha, \\ Ke^{-\alpha t} cos\left[\omega_d (t-t_0)t + \gamma\right] + x_p(\mathrm{t}) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e compl. coniugate}, \end{cases} \tag{123}$$

La soluzione generale (123) dipende: *(a)* dalla soluzione particolare dell'equazione (110) che dipende dall'andamento temporale delle tensioni e intensità di corrente dei generatori ideali presenti nel circuito; *(b)* dalle costanti di integrazione K_+ e K_-, o A e B, o K e γ; *(c)* dalle frequenze naturali λ_+ e λ_-, che sono grandezze caratteristiche del circuito, indipendenti dai generatori ideali e dalle condizioni iniziali. Le due costanti di integrazione devono essere determinate imponendo che la (123) verifichi le condizioni iniziali (114), quindi, esse dipendono dallo stato iniziale del circuito. Questi calcoli sono già riportati nel § **2.6**.

Per quanto riguarda la decomposizione delle soluzioni in termini di evoluzione libera e forzata non ripetiamo quanto già detto nel § **2.6** e nel § **7.4**.

I modi di evoluzione naturali di un generico circuito del secondo ordine sono, sostanzialmente, quelli che abbiamo già descritto nel § **2.6** quando abbiamo studiato il circuito *RLC* serie. Non ripetiamo quanto già detto nel § **2.6** riguardo alle proprietà delle frequenze e dei modi di evoluzione naturali. Qui ci soffermeremo solo su alcune proprietà dei coefficienti α e ω_r^2. Le proprietà delle frequenze naturali dipendono, ovviamente, dai valori di questi coefficienti, vedi § **2.6.2**.

Si consideri prima il caso in cui gli unici elementi adinamici lineari presenti nel circuito del secondo ordine siano solo resistori passivi. La passività implica, in generale, che $a_{kk} > 0$ e $d_k > 0$; inoltre, per i circuiti *RC* e *RL* si ha $|a_{hk}| \leq a_{kk}$, mentre per i circuiti *RLC* si ha $|a_{hk}| \leq 1$, vedi § **5.6**. Per la reciprocità si ha che

$a_{12} = a_{21}$ per i circuiti *RC* e *RL*, mentre per i circuiti *RLC* è $a_{12} = -a_{21}$, vedi § **5.6**. Di conseguenza i parametri α e ω_r^2 non possono mai assumere valori negativi, $\alpha \ge 0$, $\omega_r^2 \ge 0$. Inoltre, per i circuiti *RC* e *RL* si ha che $\alpha^2 - \omega_r^2 \ge 0$ in conseguenza del fatto che $a_{12} = a_{21}$. Questo risultato implica che le frequenze naturali di un circuito *RC* o *RL* del secondo ordine sono sempre reali e non possono essere mai positive. Invece, le frequenze naturali di un circuito *RLC* possono essere complesse coniugate, ma la loro parte reale non può essere mai positiva, vedi § **2.6**. Se il circuito contenesse elementi adinamici attivi le frequenze naturali potrebbero avere parte reale positiva.

Esercizio

Si consideri il circuito con due condensatori riportato in Figura 7.13a (o con due induttori, ad esempio, il circuito riportato in Figura 7.16a) e lo si analizzi considerandolo in evoluzione libera. Riduciamo il sistema di equazioni differenziali del primo ordine (30)-(31) ad una sola equazione differenziale del secondo ordine, ad esempio, nella funzione incognita v_a. Derivando la prima equazione rispetto al tempo abbiamo

$$C_a \frac{d^2 v_a}{dt^2} = -\frac{2}{R}\frac{dv_a}{dt} + \frac{1}{R}\frac{dv_b}{dt}. \tag{124}$$

D'altra parte sostituendo l'espressione di v_b che si ottiene dall'equazione (30),

$$v_b(t) = \frac{dv_a}{dt} + 2v_a(t), \tag{125}$$

nell'equazione (31) riusciamo ad esprimere la derivata prima di v_b in termini di v_a, della sua derivata prima,

$$C_b \frac{dv_b}{dt} = \frac{1}{R}v_a - \frac{1}{R}\left(\frac{dv_a}{dt} + 2v_a\right) = -\frac{1}{R}\frac{dv_a}{dt} - \frac{1}{R}v_a. \tag{126}$$

Sostituendo la (126) nella (124) abbiamo l'equazione per v_a,

$$\frac{d^2 v_a}{dt^2} + \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b}\right)\frac{dv_a}{dt} + \frac{1}{R^2 C_a C_b} v_a = 0. \tag{127}$$

L'integrale generale dell'equazione (127) ha l'espressione

$$v_l(t) = K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}, \tag{128}$$

dove le frequenze naturali λ_+ e λ_- sono soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right) \lambda + \frac{1}{R^2 C_a C_b} = 0, \tag{129}$$

ottenuta dall'equazione (127) sostituendo alla derivata seconda di $v_l(t)$ il monomio λ^2, alla derivata prima di $v_l(t)$ il monomio λ e alla funzione $v_l(t)$ (non derivata) il monomio $\lambda^0 = 1$. Il discriminante dell'equazione algebrica (129),

$$\Delta = \left(\frac{2}{RC_a} + \frac{1}{RC_b} \right)^2 - 4\frac{1}{R^2 C_a C_b} = \frac{4}{R^2 C_a^2} + \frac{1}{R^2 C_b^2}, \tag{130}$$

è sempre positivo. Pertanto le frequenze naturali sono sempre reali. Inoltre, esse sono sempre negative (se gli elementi del circuito sono passivi, $R > 0$, $C_a > 0$ e $C_b > 0$). Di conseguenza i modi di evoluzione naturali sono entrambi aperiodici smorzati, vedi § **2.6**, Figura 7.31.

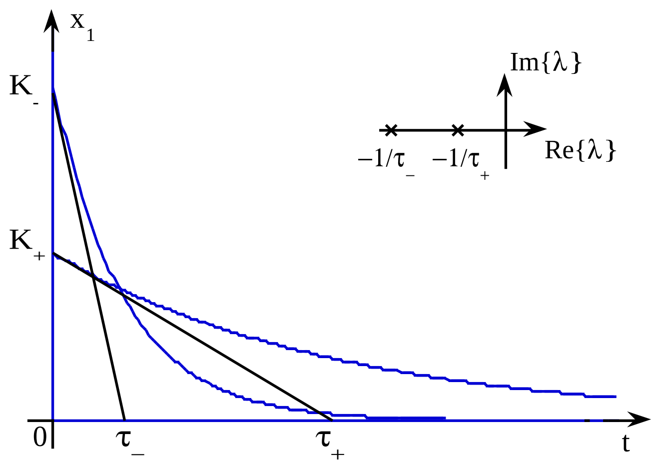

Fig. 7.31 *Modi aperiodici smorzati di un circuito RC (o RL) del secondo ordine.*

Questo è un risultato generale, che vale per ogni circuito costituito da resistori, trasformatori ideali e soli condensatori (o soli induttori).

L'evoluzione libera di un circuito costituito da soli condensatori (rispettivamente, soli induttori), resistori lineari e trasformatori ideali è descritta dalla somma di due funzioni esponenziali decrescenti, con costanti di tempo $\tau_+ = -1/\lambda_+$, $\tau_- = -1/\lambda_-$.

In questi circuiti le frequenze naturali non possono essere mai coincidenti (se si escludono casi degeneri, come, ad esempio, quello illustrato in Figura 7.32: i due condensatori non sono tra loro collegati; tuttavia, in questo caso non sarà mai possibile "eccitare" modi naturali del tipo $B(t-t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}$).

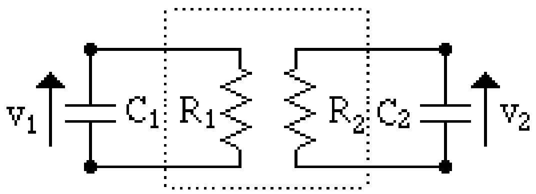

Fig. 7.32 *Esempio di un circuito RC del secondo ordine degenere.*

Osservazione

Se un circuito con due condensatori (o con due induttori) contenesse giratori e/o generatori controllati le frequenze naturali potrebbero essere complesse coniugate. In Figura 7.33 è illustrato un esempio di circuito in cui ciò può accadere. Il lettore verifichi questa affermazione e dia una spiegazione.

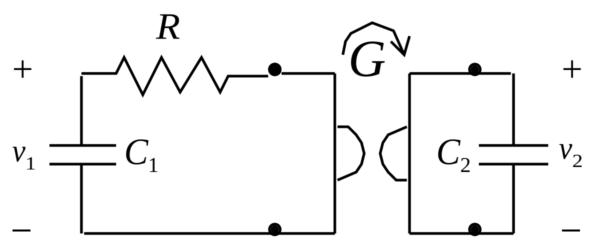

Fig. 7.33 *Esempio di un circuito RC del secondo ordine che potrebbe avere frequenze naturali complesse coniugate.*

♦

7.5.1 Considerazioni energetiche

Come per i circuiti del primo ordine (vedi § **7.4.3**), il comportamento asintotico dell'evoluzione libera può essere previsto in base a semplici considerazioni energetiche. Applicando la conservazione delle potenze a un circuito del secondo ordine in evoluzione libera si ha

$$\frac{dW}{dt} = -P_A, \tag{131}$$

dove P_A è la potenza istantanea assorbita dall'intera parte adinamica del circuito (con gli eventuali generatori ideali presenti spenti) e W è l'energia totale immagazzinata nei due elementi dinamici del circuito.
Se tutti gli elementi adinamici lineari sono strettamente passivi (vedi nota 3), la potenza P_R è maggiore di zero per ogni condizione di funzionamento ed è uguale a zero solo quando il circuito è a riposo, cioè quando entrambe le grandezze di stato sono uguali a zero. In questo caso l'energia immagazzinata a un generico istante $t > t_0$ non può mai essere più grande di quella immagazzinata all'istante iniziale $t = t_0$. Questa proprietà è generale e non dipende dall'ordine del circuito. L'energia immagazzinata diminuisce continuamente nel tempo fino a quando non diventa nulla; ricordiamo che W è definita positiva. Tutta l'energia immagazzinata inizialmente nei due elementi dinamici è dissipata all'interno degli elementi adinamici del circuito. Un elemento adinamico strettamente passivo, come il resistore con resistenza positiva, dissipa in calore tutta l'energia che assorbe. In questo caso il circuito è <u>dissipativo</u>.
Un circuito di questo tipo è un esempio un circuito *asintoticamente stabile*: l'evoluzione libera tende asintoticamente a zero per $t \to \infty$, indipendentemente dai valori iniziali dello stato. Le frequenze naturali, a causa della presenza della dissipazione, hanno parte reale minore di zero: non ci sono frequenze naturali sull'asse immaginario e si trovano tutte nel semipiano sinistro del piano di Gauss.
L'evoluzione libera non tende asintoticamente a zero ma resta limitata quando la parte reale delle frequenze naturali è uguale a zero. Ciò si verifica quando il circuito, pur essendo composto da soli elementi passivi, è privo di elementi dissipativi. In questa situazione abbiamo $P_A = 0$ e, quindi, l'energia totale immagazzinata nel circuito è costante nel tempo. Un circuito di questo tipo si

dice conservativo. Il circuito *LC* (vedi § **2.6.2**) è un esempio di circuito conservativo.
Un circuito conservativo è un circuito *stabile* (ma non asintoticamente stabile) perché l'evoluzione libera pur non tendendo a zero per $t \to \infty$, si mantiene limitata uniformemente rispetto al tempo, comunque siano i valori iniziali dello stato. Le frequenze naturali a causa dell'assenza della dissipazione, si trovano sull'asse immaginario.
Se qualche elemento adinamico lineare fosse attivo, si potrebbero avere condizioni di funzionamento per le quali $P_A < 0$. In questi casi l'energia immagazzinata crescerebbe nel tempo senza alcuna limitazione. Ad esempio, ciò può accadere quando nel circuito sono presenti generatori controllati.
Un circuito di questo tipo è *instabile* perché l'evoluzione libera diverge per $t \to \infty$. Una delle due frequenze naturali o entrambe hanno parte reale maggiore di zero e quindi si trovano nel semipiano destro del piano di Gauss.

7.5.2 Regime permanente e transitorio

Si consideri ora un circuito dissipativo in condizione di funzionamento generico. Come per i circuiti del primo ordine, il regime permanente è la soluzione che si instaurerebbe nel circuito al generico istante attuale t se il circuito avesse iniziato a funzionare all'istante iniziale $t_0 \to -\infty$. Essa non dipende dal particolare stato iniziale del circuito ed è, in generale, diverso da zero per $t \to +\infty$ (ovviamente, in presenza di generatori ideali). Anche in questo caso conviene scegliere come soluzione particolare proprio la soluzione di regime permanente, che indichiamo con $x_r = x_r(t)$. La tensione del condensatore è data da

$$x_1(t) = \begin{cases} \left(K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)}\right) + x_r(\mathrm{t}) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e reali}, \\ \left[A + B(t-t_0)\right] e^{-\alpha(t-t_0)} + x_r(\mathrm{t}) & \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha, \\ K e^{-\alpha t} \cos\left[\omega_d (t-t_0) t + \gamma\right] + x_r(\mathrm{t}) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e compl. coniugate}, \end{cases} \qquad (132)$$

Per definizione, abbiamo $\lim_{t_0 \to -\infty} x_1(t) = x_r(t)$. Anche in questo caso al termine $x_r(t)$ si dà anche il nome di *termine di regime permanente* della soluzione.
Si consideri ora il caso in cui l'istante iniziale t_0 sia al finito. Il termine dipendente dalle costanti di integrazione tende asintoticamente a zero per $t \to \infty$

(indipendentemente dai valori delle costanti di integrazione); esso è il *termine transitorio* della risposta.

$$
\text{term. transitorio}: x_{tran}(t) \equiv \begin{cases} \left(K_+ e^{\lambda_+(t-t_0)} + K_- e^{\lambda_-(t-t_0)}\right) & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e reali} \\ \left[A + B(t-t_0)\right] e^{-\alpha(t-t_0)} & \lambda_+ = \lambda_- = -\alpha \\ K e^{-\alpha t} \cos\left[\omega_d (t-t_0) t + \gamma\right] & \lambda_+ \neq \lambda_- \text{ e compl. coniug.} \end{cases}
$$

$$
\text{term. regime}: \qquad x_r(t) \equiv \lim_{t_0 \to -\infty} x_1(t)
$$

Se il circuito in evoluzione libera è passivo ma non dissipativo, le frequenze naturali sono a parte reale uguale a zero o almeno una di esse è nulla. In questo caso il “termine transitorio” non tende a zero per $t \to \infty$, ma rimane limitato. Se il circuito contiene elementi lineari attivi le frequenze naturali potrebbero avere la parte reale maggiore di zero e il termine “transitorio” divergerebbe per $t \to \infty$.

L'evoluzione di un circuito del secondo ordine dissipativo tende asintoticamente alla soluzione di regime per $t \to \infty$, indipendentemente dal valore iniziale dello stato. L'evoluzione libera tende asintoticamente a zero con legge esponenziale e l'evoluzione forzata tende asintoticamente alla soluzione di regime.

7.5.3 Regime stazionario e regime sinusoidale

Il termine di regime permanente $v_r(t)$ dipende, oltre che dai parametri caratteristici del circuito, anche dalla forma d’onda dei generatori. Verranno discussi i soliti due casi: circuiti con generatori stazionari e circuiti con generatori sinusoidali.

- *Generatori stazionari*

Si consideri un circuito con generatori indipendenti stazionari. Il termine di regime $x_r(t)$, in questo caso, è anche esso stazionario e può essere determinato con il metodo descritto nel § **6.2**.

Quando i generatori sono stazionari, il regime di funzionamento è stazionario, se il circuito è dissipativo. La soluzione stazionaria può essere ottenuta risolvendo direttamente il circuito resistivo ottenuto sostituendo ai condensatori circuiti aperti e agli induttori corto circuiti.

Per provare quanto affermato è sufficiente ricordare che in regime stazionario la corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori sono uguali a zero.

Esercizio

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 7.34. Il circuito è alimentato con un generatore a gradino. Determinare l'andamento della corrente nel condensatore.
Conviene sempre formulare il problema in termini di variabili di stato. In questo caso particolare viene prima determinata la tensione del condensatore e poi, usando la sua caratteristica, si determina la corrente.
Le equazioni caratteristiche dei bipoli a memoria sono:

$$\begin{aligned} C\frac{dv}{dt} &= i_c, \\ L\frac{di}{dt} &= v_L. \end{aligned} \tag{133}$$

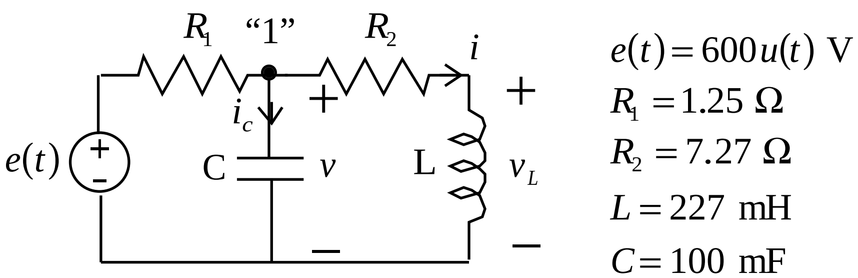

Fig. 7.34 *Circuito in evoluzione forzata.*

Per determinare le equazioni di stato bisogna esprimere la corrente nel condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato v e i. In questo caso ciò può essere fatto per ispezione diretta del circuito, applicando la legge di Kirchhoff per le correnti al nodo "1", e la seconda legge di Kirchhoff alla maglia costituita dal condensatore, dall'induttore e dal resistore di resistenza R_2. Così facendo si ottiene

$$
\begin{aligned}
&C\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R_1} - i + \frac{E_0}{R_1}u(t),\\
&L\frac{di}{dt} = v - R_2 i,
\end{aligned}
\tag{134}
$$

dove $E_0 = 600$.

Il sistema (134) è definito per $-\infty < t < +\infty$. Per $t < 0$ il generatore di tensione è spento, quindi il circuito è nello stato stazionario di riposo (il circuito è dissipativo). La tensione del generatore è limitata, e quindi le grandezze di stato sono continue in ogni istante ed in particolare all'istante $t = 0$. Pertanto si ha

$$
\begin{aligned}
&v(0^+) = v(0^-) = 0,\\
&i(0^+) = i(0^-) = 0.
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Essendo noto lo stato del circuito all'istante $t = 0^+$, bisogna risolvere il sistema (135) per $t \ge 0^+$; per $t \ge 0^+$ la funzione gradino unitario di Heaviside $u(t)$ è costante ed è uguale a uno. Dovendo calcolare la corrente nel condensatore, conviene ridurre il sistema (135) a una equazione scalare del secondo ordine nella funzione incognita $v = v(t)$. Derivando ambo i membri della prima equazione di stato rispetto al tempo e usando la seconda, si ottiene per $t \ge 0^+$

$$
\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1C}\right)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v = \frac{1}{LC}\frac{R_2}{R_1}E_0 . \tag{136}
$$

La soluzione generale dell'equazione (136) è la somma di un integrale particolare dell'equazione completa e dell'integrale generale dell'omogenea associata.

Come integrale particolare si può assumere senz'altro la tensione in regime stazionario (essendo per $t \ge 0^+$ il generatore costante):

$$
v_r = E_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 510 \tag{137}
$$

In regime stazionario il condensatore si comporta come se fosse un circuito aperto e l'induttore si comporta come se fosse un corto circuito; la (137) è stato ottenuta usando il partitore di tensione.
Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata è

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) \lambda + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \tag{138}$$

Gli zeri del polinomio caratteristico sono nel caso in esame reali, così come previsto teoricamente in precedenza,

$$\lambda_+ = -10, \ \lambda_- = -30. \tag{139}$$

L'integrale generale dell'equazione (136) vale

$$v(t) = K_+ e^{-10t} + K_- e^{-30t} + 510 \quad \text{per} \, t \geq 0^+. \tag{140}$$

I modi naturali di evoluzione sono due modi aperiodici smorzati. Per determinare le due costanti di integrazione K_+ e K_- bisogna conoscere $v(0^+)$ e $\mathrm{d}v/dt|_{t=0^+}$. Il valore iniziale della tensione è noto, $v(0^+) = v(0^-) = 0$. Il valore iniziale della derivata prima si determina usando la prima equazione di stato e le condizioni di continuità (135). Così facendo si ottiene

$$\left. \frac{dv_c}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} \left[-\frac{v(0^+)}{R_1} - i(0^+) + \frac{E_0 u(t=0^+)}{R_1} \right] = \frac{E_0}{R_1 C} = 4800. \tag{141}$$

Imponendo alla (140) le condizioni iniziali per $v(0^+)$ e $\mathrm{d}v/dt|_{t=0^+}$ si ottiene il sistema algebrico lineare

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= -510, \\ K_+ + 3K_- &= -480. \end{aligned} \tag{142}$$

Risolvendo il sistema (142) si ottengono le due costanti di integrazione; quindi si ha, in definitiva,

$$v(t) = \left(-525e^{-10t} + 15e^{-30t} + 510\right)u(t). \tag{143}$$

L'intensità di corrente del condensatore vale

$$i_c(t) = C\frac{dv}{dt} = \left(525e^{-10t} - 40e^{-30t}\right)u(t). \tag{144}$$

Si noti che la corrente del condensatore è discontinua in $t = 0$. Gli andamenti della tensione e della corrente nel condensatore sono riportati in Figura 7.32.

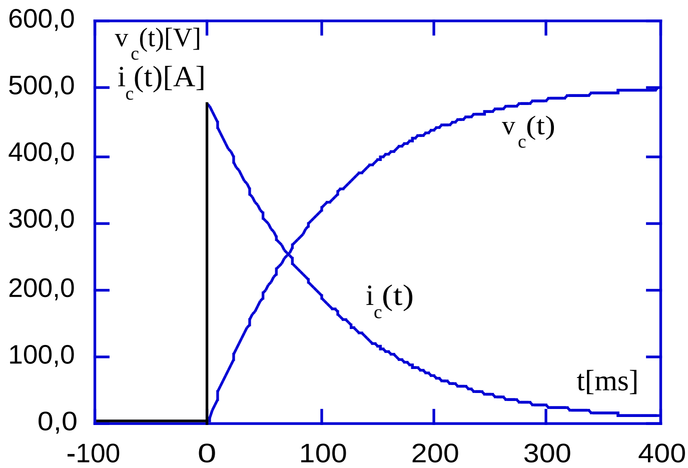

Fig. 7.35 *Andamento della corrente e della tensione del condensatore del circuito in evoluzione forzata di Figura 7.31.*

♦

Esercizio

Valutare l'andamento della tensione $v(t)$ nel circuito di Figura 7.36 supposto a riposo prima della chiusura dell'interruttore (l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$). La $v(t)$ può essere determinata una volta nota la variabile di stato $i_2 = i_2(t)$.

Il trasformatore non è ad accoppiamento perfetto perché $L_1 L_2 < M^2$. Un possibile circuito equivalente del trasformatore (reale) è rappresentato in Figura 7.37. Le induttanze L' e L'' valgono $L' = 0.5$ mH, $L'' = 1.5$ mH e il rapporto di trasformazione vale $n = L'/M = 0.5$. Usando il circuito equivalente del trasformatore di Figura 7.37, si ottiene il circuito equivalente dinamico illustrato in Figura 7.38, dove $L_e = L + L'' = 5.5$ mH.

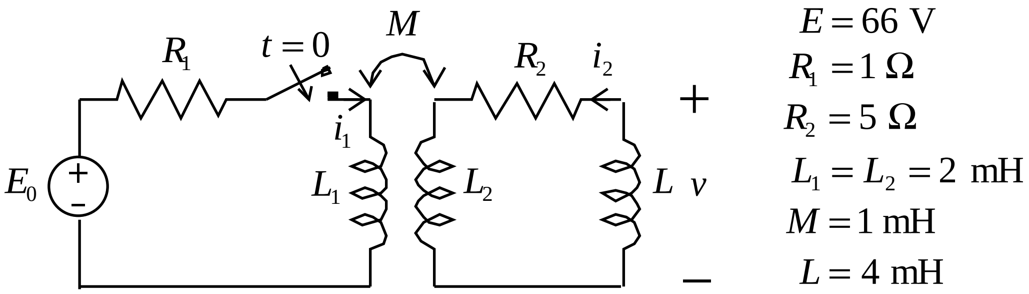

Fig. 7.36 *Circuito del secondo ordine con trasformatore (reale).*

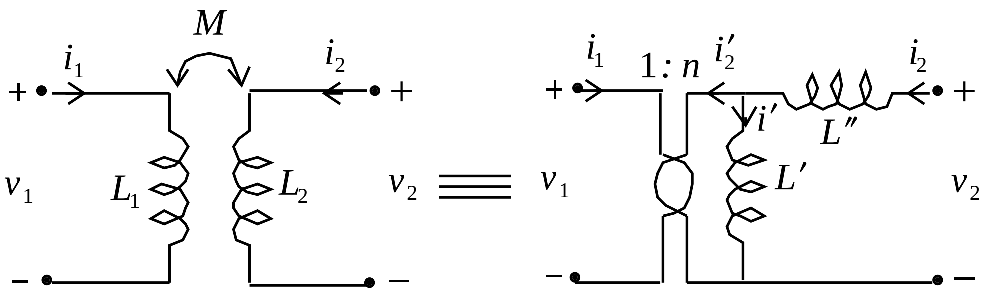

Fig. 7.37 *Circuito equivalente del trasformatore (reale).*

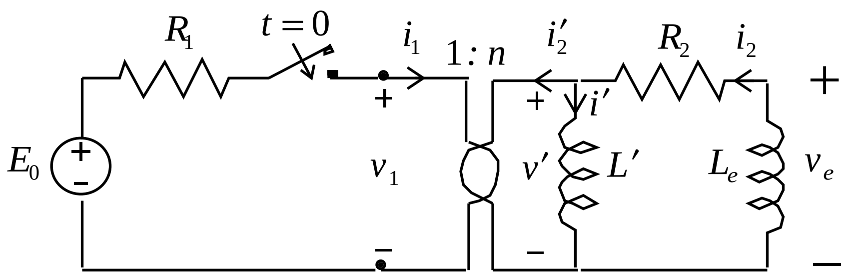

Fig. 7.38 *Circuito equivalente del circuito dinamico illustrato in Figura 7.38.*

Nel circuito in esame le variabili di stato sono le due correnti del trasformatore e la corrente dell'induttore. In realtà, le variabili di stato sono solo $i' = i'(t)$ e $i_2 = i_2(t)$ perché la corrente i_2 dell'induttore è uguale a quella che attraversa la porta "2" del trasformatore e la corrente i_1 è legata alla corrente i_2 e alla corrente i' attraverso la relazione algebrica

$$i_1 = 0.5(i' - i_2). \tag{145}$$

La corrente i_2' è uguale a $-2i_1$, perché il rapporto di trasformazione è uguale a 0.5. Infatti, le variabili di stato del circuito equivalente sono la corrente $i' = i'(t)$ e la corrente $i_2 = i_2(t)$.
Per potere scrivere le equazioni di stato del circuito equivalente di Figura 7.38, si parta dalle equazioni caratteristiche dei due induttori; esse sono:

$$
\begin{aligned}
&L'\frac{di'}{dt} = v', \\
&L_{eq}\frac{di_2}{dt} = -v_e.
\end{aligned}
\tag{146}
$$

Poi bisogna esprimere le tensioni v' e v_e in funzione delle variabili di stato i' e i_2. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia comprendente il generatore di tensione, le equazioni caratteristiche del trasformatore ideale e la prima legge di Kirchhoff al nodo a cui è collegato l'induttore con coefficiente di autoinduzione L', si ha

$$2v' = v_1 = E - R_1 i_1 = E + \frac{R_1}{2} i_2' = E + \frac{R_1}{2}\left(-i' + i_2\right) \qquad t \geq 0^+ . \tag{147}$$

Invece applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia comprendente L_{eq}, R_2 e L' si ha:

$$v_e = v' + R_2 i_2 = -\frac{R_1}{4} i' + \left(\frac{R_1}{4} + R_2\right) i_2 + \frac{E}{2} \qquad t \geq 0^+ . \tag{148}$$

Pertanto le equazioni di stato sono per $t \geq 0^+$

$$
\begin{cases}
L'\dfrac{di'}{dt} = -\dfrac{R_1}{4} i' + \dfrac{R_1}{4} i_2 + \dfrac{E}{2}, \\
L_{eq}\dfrac{di_2}{dt} = \dfrac{R_1}{4} i' - \left(\dfrac{R_1}{4} + R_2\right) i_2 - \dfrac{E}{2}.
\end{cases}
\tag{149}
$$

Il sistema (149) deve essere risolto con le condizioni iniziali

$$i'(0^+) = i'(0^-) = 0,$$
$$i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0. \tag{150}$$

Con i valori assegnati dei parametri, si ottiene dal sistema (149) l'equazione scalare per la corrente i_2

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{16}{11} \cdot 10^3 \frac{di_2}{dt} + \frac{5}{11} \cdot 10^6 i_2 = 0 \qquad t \geq 0^+ \tag{151}$$

L'integrale generale dell'equazione (151) è:

$$i_2(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{152}$$

dove

$$\lambda_1 = -1000, \;\; \lambda_2 = -\frac{10}{22} 10^3 \cong -454.5 \tag{153}$$

sono le frequenze naturali del circuito. Per determinare le costanti di integrazione bisogna imporre le condizioni iniziali per $i_2(t)$ e di_2/dt all'istante $t = 0^+$. Il valore iniziale di $i_2(t)$ è nullo; invece il valore iniziale di di_2/dt è dato dalla seconda equazione del sistema (149), imponendo che all'istante iniziale sia nulla anche i',

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0^+} = -6000 \text{ A/s}. \tag{154}$$

Imponendo queste due condizioni si ottiene il sistema di equazioni lineari e algebriche in due incognite

$$K_1 + K_2 = 0,$$
$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = -6000. \tag{155}$$

Risolvendo il sistema (155) e sostituendo nell'integrale generale, si ottiene

$$i_2(t) = 11\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)u(t), \tag{156}$$

e quindi

$$v(t) = \left(44e^{\lambda_1 t} - 20e^{\lambda_2 t}\right)u(t). \tag{157}$$

In Figura 7.39 sono rappresentati gli andamenti della corrente $i_2(t)$ e della tensione $v(t)$.

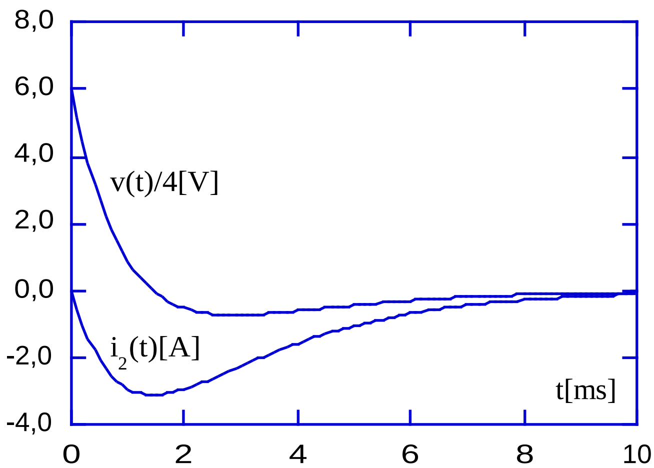

Fig. 7.39 *Andamento della corrente $i_2(t)$ e della tensione $v(t)$.*

♦

- *Generatori sinusoidali isofrequenziali*

Si consideri un circuito con generatori indipendenti sinusoidale con pulsazione ω. Il termine di regime permanente $x_r(t)$ è anche esso sinusoidale con pulsazione ω.

Quando i generatori sono sinusoidali e isofrequenziali, il regime di funzionamento che si instaura nel circuito è anche esso di tipo sinusoidale con la stessa pulsazione dei generatori, se il circuito è dissipativo.

In questi casi la soluzione di regime può essere ottenuta direttamente utilizzando il *metodo fasoriale*, trattato nel Capitolo 6.

Come mostreremo nel prossimo paragrafo, nella situazione limite in cui il circuito non è dissipativo esso non raggiunge più il regime sinusoidale. In particolare, quando la pulsazione dei generatori è uguale a quella naturale del circuito, non esiste nemmeno una soluzione particolare sinusoidale.

Esercizio

Il lettore risolva il circuito di Figura 7.34 assumendo che $e(t) = E_m \, sin \omega t$, $\omega = 100$ rad/s, $E_m = 1$ V e il circuito sia inizialmente a riposo.

♦

- *Generatori periodici o quasi periodici*

Quando il circuito contiene generatori costanti e generatori sinusoidali con diverse pulsazioni, allora la soluzione di regime può essere determinato utilizzando la sovrapposizione degli effetti: la soluzione di regime è la somma delle soluzioni di regime che ciascuno dei generatori produrrebbe se agisse da solo, essendo gli altri "spenti".

Esercizio

Il lettore risolva il circuito di Figura 7.36 assumendo che $e(t) = E + E_m \, sin \omega t$, $\omega = 100$ rad/s, $E_m = 1$ V e $E = -0.5$ V.

♦

7.5.4 Condensatori (induttori) connessi in serie e in parallelo

In questo paragrafo affronteremo una questione molto interessante: quali sono i bipoli equivalenti a due condensatori (o induttori) collegati in parallelo e a due condensatori (o induttori) collegati in serie ?
In Figura 7.40a è riportato un bipolo costituito di due condensatori di capacità C_1 e C_2 collegati in parallelo, mentre in Figura 7.40b è riportato un bipolo costituito di due condensatori di capacità C_1 e C_2 collegati in serie. Ora

determineremo le equazioni caratteristiche di questi due bipoli e, quindi, i corrispondenti bipoli equivalenti.

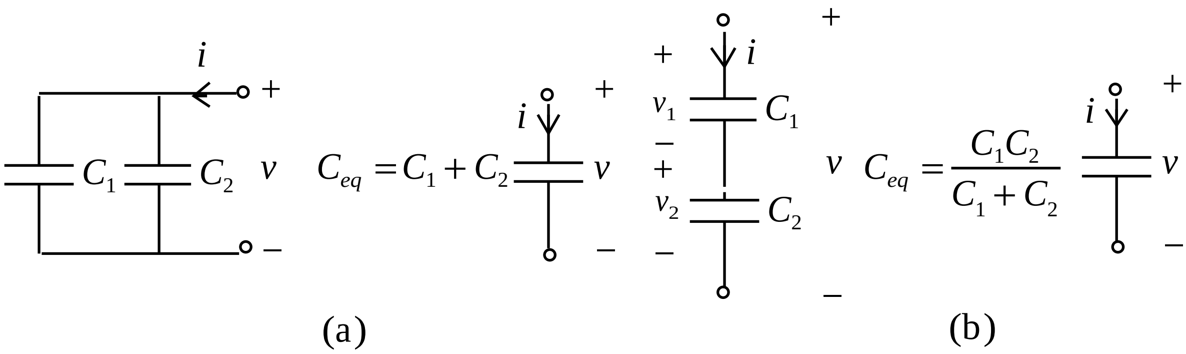

Fig. 7.40 *(a) Condensatori collegati in parallelo, (b) condensatori collegati in serie.*

- *Condensatori connessi in parallelo*

Due condensatori connessi in parallelo hanno la stessa tensione v, quindi c'è una sola grandezza di stato. Le loro equazioni caratteristiche sono

$$i_1 = C_1 \frac{dv}{dt}, \tag{158}$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv}{dt}. \tag{159}$$

Essendo $i = i_1 + i_2$, sommando ambo i membri delle equazioni (158) e (159) si ottiene

$$i = (C_1 + C_2)\frac{dv}{dt}. \tag{160}$$

Allora possiamo concludere che due condensatori di capacità C_1 e C_2 collegati in parallelo sono equivalenti a un solo condensatore di capacità equivalente

$$C_{eq} = C_1 + C_2. \tag{161}$$

Una volta nota l'intensità della corrente $i(t)$ che attraversa il parallelo, per determinare le intensità di corrente che attraversano i singoli condensatori basta applicare le formule

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i, \tag{162}$$

$$i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i. \tag{163}$$

Queste due formule si ottengono combinando le relazioni (158) e (159) con la relazione (160).
In conclusione, un generico circuito che contiene due condensatori in parallelo può essere studiato considerando il circuito equivalente ottenuto sostituendo il parallelo con il condensatore equivalente. Una volta risolto il circuito ridotto così ottenuto, attraverso le formule (162) e (163) si determinano le intensità di corrente dei singoli condensatori del parallelo.

- ***Condensatori connessi in serie***

Due condensatori connessi in serie hanno la stessa intensità di corrente i. In generale, le due tensioni sono diverse, quindi le grandezze di stato sono due. Le loro equazioni caratteristiche sono

$$i = C_1 \frac{dv_1}{dt}, \tag{164}$$

$$i = C_2 \frac{dv_2}{dt}. \tag{165}$$

Da queste equazioni si ottiene

$$C_1[v_1(t) - V_{10}] = C_2[v_2(t) - V_{20}], \tag{166}$$

dove V_{10} e V_{20} sono le condizioni iniziali dei due condensatori. Indichiamo con v la tensione della serie. Siccome $v = v_1 + v_2$, dalla relazione (184) abbiamo

$$v_1(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v(t) + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\left(\frac{C_1}{C_2} V_{10} - V_{20}\right), \tag{167}$$

$$v_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v(t) + \frac{C_1}{C_1 + C_2}\left(\frac{C_2}{C_1} V_{20} - V_{10}\right). \tag{168}$$

Sostituendo l'espressione di v_1 data dalla (167) nell'equazione (164) si ha

$$i = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{dv}{dt}. \tag{169}$$

Allora possiamo concludere che due condensatori di capacità C_1 e C_2 collegati in serie sono equivalenti a un solo condensatore di capacità equivalente

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{170}$$

La condizione iniziale della tensione del condensatore equivalente è $V_0 = V_{10} + V_{20}$. Una volta nota la tensione della serie attraverso le formule (167) e (168) è possibile determinare le tensioni dei singoli condensatori.
In conclusione, un generico circuito che contiene due condensatori in serie può essere studiato considerando il circuito equivalente ottenuto sostituendo la serie con il condensatore equivalente. Una volta risolto il circuito ridotto così ottenuto, attraverso le formule (167) e (168) si determinano le tensioni dei singoli condensatori della serie.

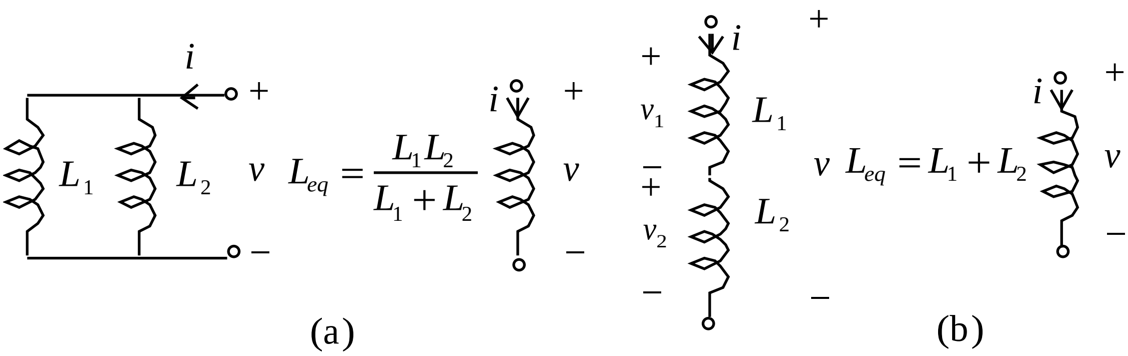

Fig. 7.41 *(a) Induttori collegati in parallelo, (b) induttori collegati in serie.*

Esercizio

Il lettore dimostri che: *(i)* due induttori di induttanze L_1 e L_2 collegati in serie, Figura 7.41a, sono equivalenti a un solo induttore di induttanza

$$L_{eq} = L_1 + L_2; \tag{171}$$

due induttori di induttanze L_1 e L_2 collegati in parallelo, Figura 7.41b, sono equivalenti a un solo induttore di induttanza

$$L_{eq} = L_1 L_2 / L_1 + L_2. \tag{172}$$

Inoltre, dimostri che per i due induttori collegati in serie si ha

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v, \tag{173}$$

$$v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v, \tag{174}$$

e per i due induttori collegati in parallelo si ha

$$i_1(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i(t) + \frac{L_2}{L_1 + L_2}\left(\frac{L_1}{L_2} I_{10} - I_{20}\right), \tag{175}$$

$$i_2(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i(t) + \frac{L_1}{L_1 + L_2}\left(\frac{L_2}{L_1} I_{20} - I_{10}\right), \tag{176}$$

I_{10} e I_{20} sono le condizioni iniziali dei due induttori. La condizione iniziale dell'intensità di corrente dell'induttore equivalente è $I_0 = I_{10} + I_{20}$.

Osservazioni

Si consideri il circuito in evoluzione libera rappresentato in Figura 7.42a; indichiamo con V_{10} e V_{20} le condizioni iniziali dei due condensatori. In Figura 7.42b è riportato il circuito equivalente ottenuto sostituendo alla serie dei due condensatori il condensatore equivalente.
E' evidente che qualsiasi sia il valore della condizione iniziale della tensione del condensatore equivalente, $V_0 = V_{10} + V_{20}$, la tensione $v(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ (se $R > 0$) con legge esponenziale con la costante di tempo $\tau = RC_{eq}$. Tuttavia, in generale, le tensioni dei singoli condensatori, in accordo con le (167) e (168) non tendono a zero per $t \to +\infty$, ma tendono a due valori costanti, l'uno l'opposto dell'altro, dipendenti unicamente dai valori iniziali delle tensioni dei

singoli condensatori che costituiscono la serie. Questo è un risultato molto importante. Una delle due frequenze naturali del circuito di Figura 7.42a è uguale a zero, cioè si ha $-1/\tau = \lambda_- < \lambda_+ = 0$. In questi casi l'evoluzione libera, in generale, è costituita da un esponenziale smorzato con costante di tempo uguale a τ e da un termine costante. Essa non tende a zero per $t \to \infty$, ma tende asintoticamente a una costante dipendente dallo stato iniziale.

L'energia immagazzinata all'istante iniziale nei due condensatori non viene completamente assorbita dai resistori e, quindi, dissipata. È evidente, allora, che quando due condensatori sono in serie la potenza assorbita da un resistore collegato alla serie può essere zero pur continuando a esserci energia immagazzinata nei due condensatori.

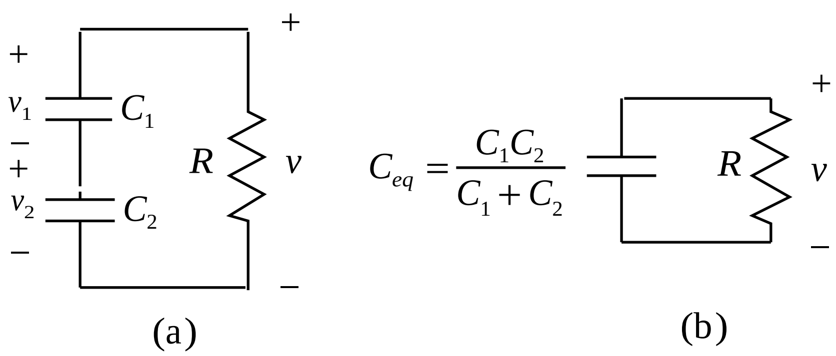

Fig. 7.42 *Esempio di circuito del secondo ordine passivo ma non dissipativo.*

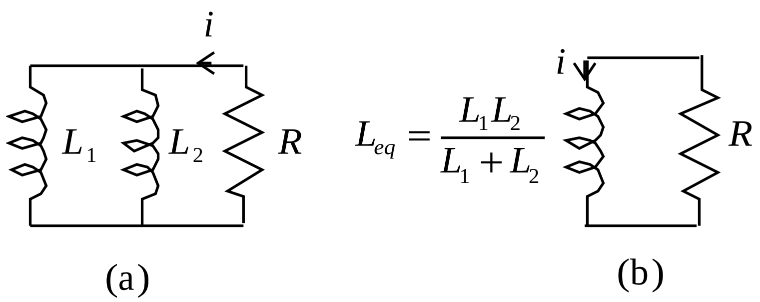

Fig. 7.43 ***Un altro** esempio di circuito del secondo ordine passivo ma non dissipativo.*

Considerazioni analoghe valgono per il circuito con due induttori collegati in parallelo rappresentato in Figura 7.43. Lasciamo al lettore la verifica.

Possiamo, allora, concludere affermando che *un circuito costituito da soli condensatori (rispettivamente, soli induttori), resistori lineari e trasformatori ideali è dissipativo se i due condensatori non sono in serie (rispettivamente, i due induttori non sono in parallelo).*

È evidente che, n condensatori in parallelo di capacità $C_1, C_2, ..., C_n$, equivalgono a un solo condensatore di capacità equivalente $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ e, dualmente, m induttori in serie di induttanza $L_1, L_2, ..., L_m$ equivalgono a un solo induttore di induttanza $L_{eq} = \sum_{i=1}^{m} L_i$. In entrambi i casi, pur avendo più elementi dinamici, abbiamo una sola grandezza di stato.

♦

7.6 Circuiti risonanti

I circuiti risonanti sono di grande importanza: *(a)* essi sono impiegati nelle apparecchiature di misura, nei circuiti di comunicazione (filtri passa-banda, oscillatori, sincronizzatori, ...), nei circuiti convertitori da continua a continua, e così via; *(b)* esso costituisce uno degli esempi più significativi del fenomeno fisico della risonanza.

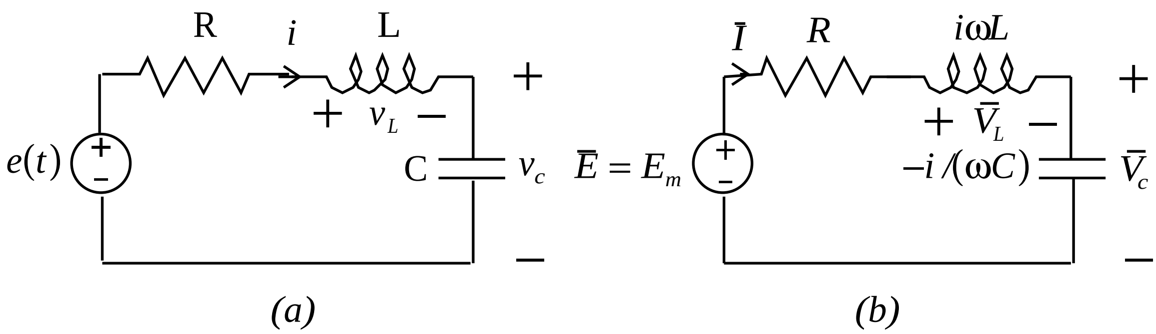

Fig. 7.44 *Circuito RLC serie (a) nel dominio del tempo, (b) nel dominio simbolico.*

Noi studieremo in dettaglio il circuito risonante *RLC* serie, Figura 7.44a, costituito da un resistore di resistenza R, un condensatore di capacità C e un induttore di induttanza L, collegati in serie, alimentati da un generatore di tensione sinusoidale $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. Considerazioni analoghe possono essere svolte per quello *RLC* parallelo. Si assuma che il resistore, il condensatore e l'induttore siano passivi.
Si consideri il funzionamento in regime sinusoidale del circuito in esame; esso è dissipativo solo se $R \neq 0$; in Figura 7.44b è illustrato il circuito di impedenze corrispondente. Il fasore $\bar{I} = I_m e^{i\alpha}$ rappresentativo della corrente $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$ è dato da

$$\bar{I} = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{eq}}, \tag{177}$$

dove $\overline{E} = E_m$ è il fasore rappresentativo della tensione del generatore e

$$\dot{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{178}$$

è l’impedenza equivalente della serie *RLC*. Il valore massimo dell’intensità di corrente è

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{179}$$

e la fase iniziale è

$$\alpha(\omega) = -arctg\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R\right]. \tag{180}$$

Si consideri, ora, l’andamento dell’ampiezza massima e della fase iniziale dell’intensità di corrente $i(t)$ al variare di ω; è possibile concepire un esperimento in cui l’ampiezza del generatore sinusoidale è fissata e la pulsazione, invece, viene cambiata. È immediato verificare che la funzione $I_m = I_m(\omega)$ definita dalla (179) tende a zero per $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$, e assume il massimo (Figura 7.45) in corrispondenza della pulsazione caratteristica del circuito ω_r data da ,

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{181}$$

La pulsazione ω_r prende il nome di *pulsazione di risonanza* del circuito. Quando la pulsazione del generatore è uguale alla pulsazione di risonanza si dice che il generatore è in *risonanza* con il circuito. Si osservi che la pulsazione di risonanza <u>coincide</u> con la frequenza naturale del circuito quando <u>R=0</u>.
Per $\omega \to 0$ il modulo dell'impedenza $\dot{Z}$ tende all’infinito perché tende all’infinito il modulo della reattanza del condensatore; per $\omega \to \infty$ il modulo di $\dot{Z}$ tende di

nuovo all'infinito perché ora è la reattanza dell'induttore che tende all'infinito. Alla pulsazione di risonanza la parte immaginaria dell'impedenza $\dot{Z}$ è uguale a zero, perché la reattanza del condensatore è l'opposta di quella dell'induttore, e quindi il modulo di $\dot{Z}$ assume il valore minimo.

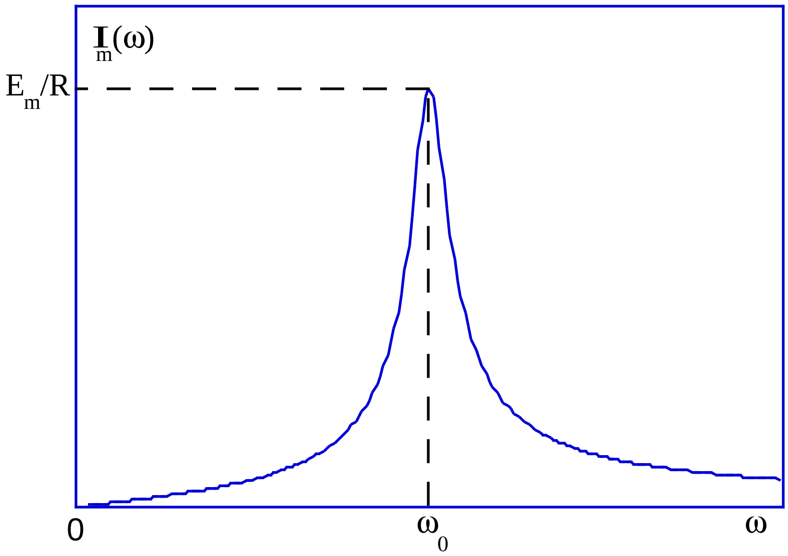

Fig. 7.45 *Diagramma dell'ampiezza* $I_m(\omega)$.

Alla risonanza l'ampiezza massima dell'intensità di corrente vale

$$I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}. \tag{182}$$

Il valore dell'ampiezza massima dell'intensità di corrente alla risonanza è uguale a quello che si avrebbe se nel circuito vi fosse solo il resistore. Alla risonanza il valore della tensione del condensatore $\overline{V}_C$ è l'opposto di quello della tensione dell'induttore $\overline{V}_L$,

$$\overline{V}_C(\omega_r) + \overline{V}_L(\omega_r) = 0. \tag{183}$$

e quindi la tensione sul resistore è uguale a quella del generatore. La (183) è conseguenza del fatto che la reattanza dell'induttore è positiva e quella del condensatore è negativa (l'induttore assorbe potenza reattiva e il condensatore la eroga).

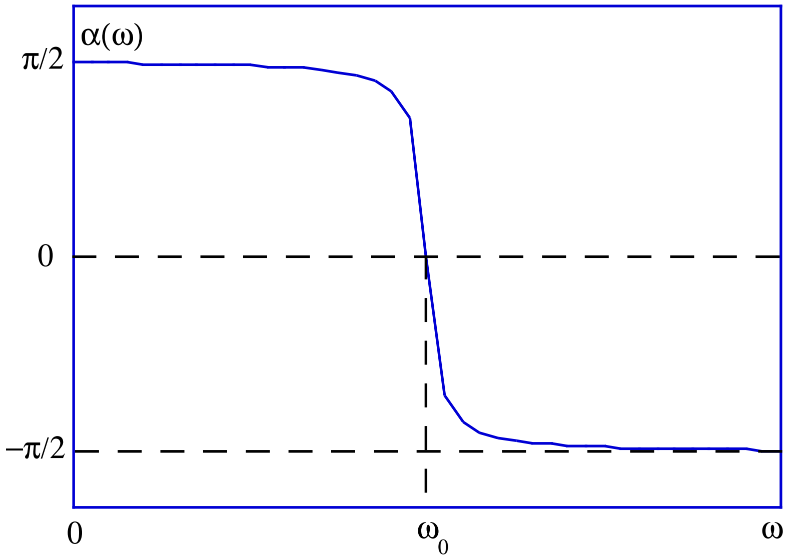

Fig. 7.46 *Diagramma della fase iniziale* $\alpha(\omega)$.

L'andamento della fase $\alpha(\omega)$ al variare della pulsazione del generatore è illustrato nel diagramma di Figura 7.47. Per $\omega \le \omega_r$ la fase iniziale è positiva, cioè il fasore dell'intensità di corrente è in anticipo rispetto a quello della tensione applicata (prevale il comportamento capacitivo): per $\omega \to 0$ si ha $\alpha \to \pi/2$. Per $\omega_r \ge \omega$ la fase iniziale è negativa, cioè il fasore della corrente è in ritardo rispetto a quello della tensione applicata (prevale il comportamento induttivo): per $\omega \to \infty$, $\alpha \to -\pi/2$. Per $\omega = \omega_r$ l'intensità di corrente è in fase con la tensione applicata, perché l'impedenza equivalente $\dot{Z}$ ha solo parte reale.

Si consideri la tensione dell'induttore alla risonanza. Essa è data da

$$\bar{V}_L = i\bar{E}\frac{\omega_r L}{R}. \qquad (184)$$

Pertanto il valore massimo V_{mL} della tensione dell'induttore alla risonanza è

$$V_{mL} = QE_m, \qquad (185)$$

dove

$$Q = \frac{\omega_r L}{R}. \qquad (186)$$

Il parametro adimensionale Q è il *fattore di qualità* del circuito risonante serie. Esso può essere maggiore o minore di uno, a seconda dei parametri del circuito.

Dalla (185) si ha che in un circuito risonante *RLC* serie il valore massimo della tensione dell'induttore è più grande del valore massimo della tensione del generatore se il fattore di qualità del circuito è maggiore di uno: in questo circuito c'è "l'amplificazione" del valore massimo della tensione.

Osservazione

Il fenomeno della risonanza, appena descritto, è dovuto alla presenza nel circuito dell'induttore e del condensatore, cioè di un elemento che assorbe potenza reattiva e di un altro che la eroga. Questo fenomeno non si osserva se nel circuito ci sono soli induttori, ad esempio, in un circuito *RL* serie. In questo caso il fasore rappresentativo della corrente è

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + i\omega L}, \tag{187}$$

quindi l'ampiezza della corrente vale

$$I_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \tag{188}$$

L'ampiezza massima dell'intensità di corrente è una funzione decrescente della pulsazione: essa ha il valore massimo in $\omega = 0$, $I_m(\omega = 0) = E_m / R$, e tende asintoticamente a zero per $\omega \to \infty$. A differenza del circuito serie *RLC*, il modulo dell'impedenza equivalente è una funzione strettamente crescente della pulsazione. Inoltre l'ampiezza della tensione del resistore e l'ampiezza della tensione dell'induttore sono minori dell'ampiezza della tensione del generatore, a differenza di quanto può accadere nel circuito risonante *RLC* serie.
Il lettore provi a dimostrare che in un circuito costituito da soli induttori (o soli condensatori), resistori e un solo generatore vale la proprietà di non amplificazione per i valori massimi delle correnti e delle tensioni. Si noti che la proprietà di non amplificazione non vale, invece, per i valori istantanei. Infatti, a causa degli sfasamenti, negli istanti di tempo in cui la tensione (o la corrente) dell'unico generatore è zero, le tensioni sugli altri bipoli sono diverse da zero. In questi istanti alcuni elementi conservativi erogano potenza elettrica.

♦

Cosa accade nel circuito *RLC* serie nel limite $R \to 0$? Quando la resistenza diminuisce l'ampiezza massima dell'intensità di corrente cresce: alla risonanza essa cresce come $1/R$ e quindi diverge per $R \to 0$. Cosa significa un'ampiezza massima infinita?

Per $R = 0$ abbiamo il circuito *LC* serie di Figura 7.47. Esso è un circuito passivo ma non è dissipativo. Analizziamo questo circuito con $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

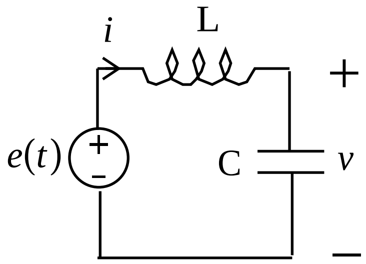

Fig. 7.47 *Circuito LC serie.*

Quando la pulsazione del generatore è <u>uguale</u> alla pulsazione naturale del circuito, che in questo caso è uguale proprio a quella di risonanza, $\omega = \omega_r$, il circuito in esame non possiede soluzioni sinusoidali. In questo caso una soluzione particolare del circuito è una funzione sinusoidale con pulsazione ω_r e ampiezza crescente linearmente nel tempo.

L'equazione per l'intensità di corrente del circuito *LC* è (nella condizione $\omega = \omega_r$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_r^2 i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt} = -\frac{1}{L}\omega_r E_m \sin(\omega_r t). \qquad (189)$$

È immediato verificare che questa equazione non ha una soluzione sinusoidale a pulsazione ω_r (l'ampiezza dovrebbe essere infinita). Una soluzione particolare di questa equazione è

$$i(t) = \frac{1}{2}\frac{E_m}{R_c}(\omega_r t)\cos\omega_r t, \qquad (190)$$

dove ricordiamo che

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (191)$$

Questa è la soluzione del circuito che verifica le condizioni iniziali $i(0)=0$ e $v(0)=E_m/2$.

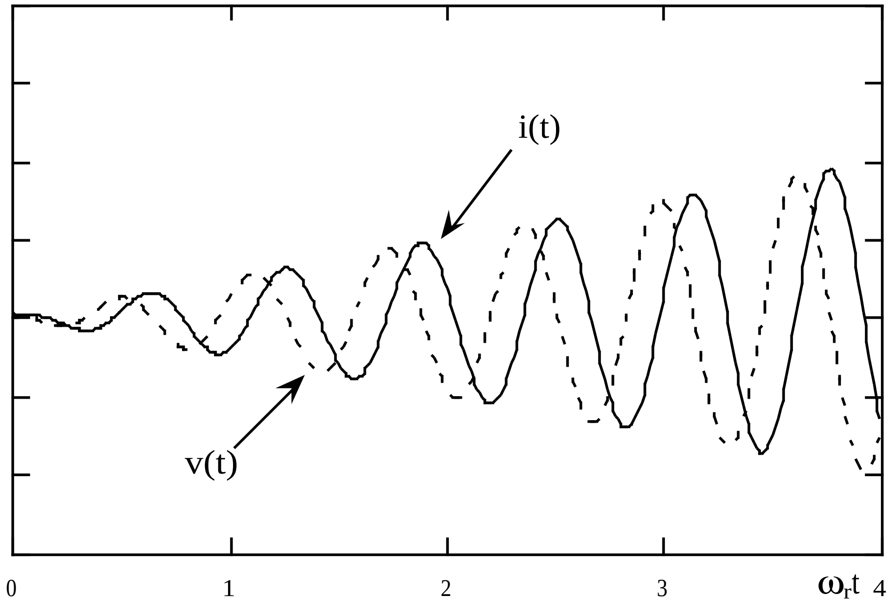

Fig. 7.48 *Andamento della corrente i(t), curva ——, e della tensione $v(t)$, curva ---, nel circuito risonante LC serie (per condizioni iniziali $i(0)=0$ e $v(0)=E_m/2$).*

In Figura 7.48 è illustrato l'andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo: un andamento sinusoidale con ampiezza crescente linearmente nel tempo. Quando non ci sono perdite e il generatore di tensione è in risonanza con il circuito, l'azione del generatore è <u>sincrona</u> con l'oscillazione naturale del circuito per un'opportuna scelta delle condizioni iniziali. Ciò rende possibile un continuo trasferimento di energia dal generatore al circuito. Infatti, nel caso in esame la potenza istantanea erogata dal generatore è

$$p(t)=\frac{1}{2}\frac{E_m^2}{R_c}(\omega_r t)cos^2\,\omega_r t. \tag{192}$$

Essa è sempre positiva e la sua ampiezza cresce linearmente nel tempo: l'energia fornita dal generatore è immagazzinata nell'induttore e nel condensatore. In queste condizioni il condensatore e l'induttore non cedono, nemmeno in parte, l'energia assorbita in precedenza. Ciò ricorda un fenomeno a tutti ben noto: la possibilità di far crescere nel tempo l'ampiezza massima dell'oscillazione di un'altalena agendo su di essa con una forza sincrona con il

periodo proprio di oscillazione dell'altalena (l'altalena si comporta come se fosse un pendolo) e in fase con il suo verso di moto.
L'andamento temporale della tensione del condensatore è descritto dalla funzione, Figura 7.48,

$$v(t) = \frac{1}{2} E_m \cos \omega_r t - \frac{1}{2} E_m (\omega_r t) \sin \omega_r t. \tag{193}$$

In realtà non mai è possibile avere esattamente $R = 0$: possiamo solo ridurre il valore della resistenza elettrica R del circuito a valori molto piccoli se confrontati con la "resistenza caratteristica" R_c. In questa situazione il circuito ha un regime sinusoidale e l'ampiezza massima della corrente a regime è $I_m = E_m / R$. L'ampiezza della corrente cresce linearmente fino a raggiungere il valore di regime $I_m = E_m / R$, dopodiché satura. Il tempo necessario per raggiungere il valore di saturazione è $2R_c / (R\omega_r) = 2L / R = 1/\alpha$. Questa è proprio la costante di tempo del circuito *RLC* quando il modo di evoluzione è oscillante con ampiezza smorzata.

Esercizio

Il lettore descriva il fenomeno della risonanza nel circuito *RLC* parallelo illustrato in Figura 7.49.

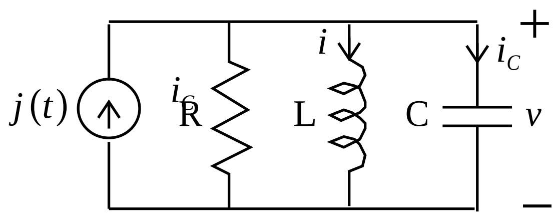

Fig. 7.49 *Circuito RLC parallelo.*

7.7 Analisi di circuiti con generatori impulsivi

In questo paragrafo studieremo circuiti con generatori impulsivi. La procedura che descriveremo è generale e può essere applicata a qualsiasi tipo di circuito. Per esemplificare faremo riferimento al circuito di Figura 7.50; si determini la tensione del condensatore.

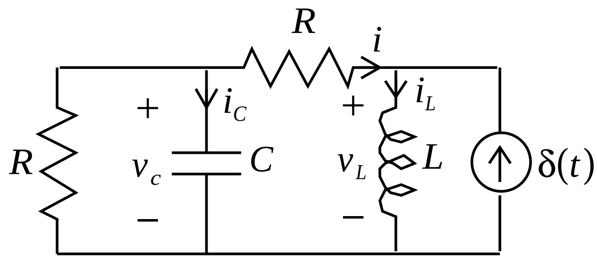

Fig. 7.50 *Un esempio di circuito in evoluzione forzata con generatore impulsivo di corrente.*

Per $t < 0$ il circuito è nello stato di riposo (tutte le grandezze sono nulle e quindi anche le grandezze di stato). All'istante $t = 0$ è applicata una corrente (o tensione) impulsiva attraverso un generatore di corrente (rispettivamente, un generatore di tensione) impulsivo. Di conseguenza, le correnti che attraversano i condensatori e le tensioni degli induttori possono essere impulsive all'istante $t = 0$ e, quindi, le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori (cioè le grandezze di stato del circuito), possono essere discontinue all'istante $t = 0$: le grandezze di stato pur essendo identicamente nulle per $t < 0$, possono essere diverse da zero all'istante $t = 0^+$.
Per $t \geq 0^+$ il circuito è in evoluzione libera, perché il generatore impulsivo si spegne immediatamente dopo l'istante di applicazione $t = 0$. Se si conoscessero le tensioni dei condensatori e le correnti negli induttori all'istante $t = 0^+$, la soluzione del problema potrebbe essere ottenuta risolvendo il circuito in evoluzione libera a partire dall'istante $t = 0^+$.
Per determinare il salto di discontinuità delle tensioni dei condensatori e delle correnti negli induttori all'istante $t = 0$, bisogna usare le loro relazioni caratteristiche. Le equazioni caratteristiche dei bipoli dinamici sono:

$$\begin{aligned} C\frac{dv_c}{dt} &= i_c, \\ L\frac{di_L}{dt} &= v_L. \end{aligned} \qquad (194)$$

I valori delle grandezze di stato sono noti all'istante $t = 0^-$ e sono:

$$v_c(0^-) = 0,\ i_L(0^-) = 0. \qquad (195)$$

Per determinare i valori che esse assumono all'istante $t=0^+$, bisogna considerare l'integrale definito, nell'intervallo $\left(0^-,0^+\right)$, di ambo i membri delle equazioni (194). Operando in questo modo e usando le (195), si ottiene:

$$\begin{aligned} v_c\left(0^+\right) &= \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau)d\tau, \\ i_L\left(0^+\right) &= \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{196}$$

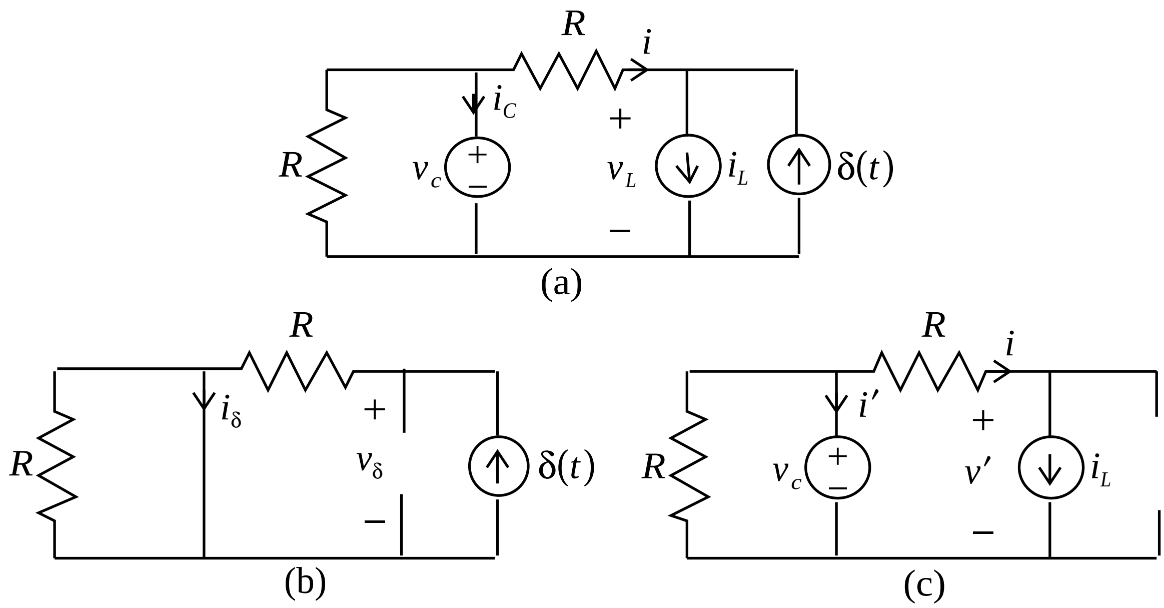

Fig. 7.51 *(a) Circuito resistivo associato al circuito dinamico di figura 7.50; (b) e (c) circuiti ausiliari per la soluzione del circuito resistivo associato tramite la sovrapposizione degli effetti.*

Ora bisogna esprimere l'intensità di corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato e della corrente del generatore impulsivo. A tale scopo è utile considerare il circuito resistivo associato, cioè il circuito ottenuto sostituendo in quello in esame, al posto del condensatore un generatore di tensione con tensione pari a v_c e al posto dell'induttore un generatore di corrente con corrente pari a i_L, Figura 7.51a. Questo circuito si può risolvere usando la sovrapposizione degli effetti. Operando in questo modo si ha per i_c e v_L:

$$\begin{aligned} i_c &= i_\delta + i', \\ v_L &= v_\delta + v', \end{aligned} \tag{197}$$

dove i_δ e v_δ sono, rispettivamente, i contributi del generatore impulsivo all'intensità di corrente che attraversa il condensatore e alla tensione dell'induttore e i' e v' sono i contributi dei generatori di sostituzione. Le grandezze i_δ e v_δ sono soluzione del circuito che si ottiene spegnendo i generatori di sostituzione e lasciando acceso solo quello impulsivo (Figura 7.51b), e quindi sono certamente funzioni impulsive. Il contributo del generatore impulsivo alle intensità di corrente dei condensatori e alle tensioni degli induttori può essere determinato risolvendo il circuito resistivo ottenuto sostituendo a ogni condensatore un corto circuito e a ogni induttore un circuito aperto. Le grandezze i' e v', invece, sono soluzione del circuito che si ottiene spegnendo il generatore impulsivo e lasciando accesi solo quelli di sostituzione (Figura 7.51c).
Se si esclude il caso molto particolare e anche poco significativo in cui i generatori impulsivi sono in parallelo ai condensatori o in serie agli induttori, le grandezze di stato si mantengono limitate per ogni t, pure potendo presentare dei punti di discontinuità di prima specie. Di conseguenza la soluzione del circuito di Figura 7.51c è limitata e quindi sono limitate anche i' e v'. È immediato, allora, che qualunque siano i valori (limitati) di i' e v' nell'intorno di $t=0$, essi non danno nessun contributo agli integrali nelle equazioni (196). L'unico contributo diverso da zero può venire dai termini i_δ e v_δ. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} v_c\left(0^+\right) &= \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_\delta(\tau)d\tau, \\ i_L\left(0^+\right) &= \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_\delta(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{198}$$

Risolvendo il circuito di Figura 7.51b si ottiene:

$$i_\delta = \delta(t),\; v_\delta = R\delta(t). \tag{199}$$

Dopo avere sostituito le (199) nelle (198) si ha:

$$v_c\left(0^+\right) = \frac{1}{C},\quad i_L\left(0^+\right) = \frac{R}{L}. \tag{200}$$

A questo punto bisogna risolvere un circuito in evoluzione libera con le condizioni iniziali (200) per lo stato.

Per determinare le equazioni di stato per $t \ge 0^+$, bisogna esprimere l'intensità di corrente del condensatore e la tensione dell'induttore in funzione delle grandezze di stato. Ciò può essere fatto risolvendo il circuito resistivo associato di Figura 7.51c. In questo modo si ottiene per $t \ge 0^+$

$$\begin{aligned} C\frac{dv_c}{dt} &= -\frac{v_c}{R} - i_L, \\ L\frac{di_L}{dt} &= v_c - Ri_L. \end{aligned} \tag{201}$$

Il sistema (201) è omogeneo. Dovendo calcolare la tensione del condensatore, conviene ridurlo a una equazione scalare del secondo ordine nella funzione incognita $v_c(t)$. Derivando ambo i membri della prima equazione di stato rispetto al tempo e usando la seconda, si ottiene

$$\frac{d^2v_c}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)\frac{dv_c}{dt} + \frac{2}{LC}v_c = 0 \quad \text{per} t \ge 0^+. \tag{202}$$

L'integrale generale dell'equazione (31) è

$$v_c(t) = K_+e^{\lambda_+ t} + K_-e^{\lambda_- t}, \tag{203}$$

dove le frequenze naturali λ_+ e λ_- (si è implicitamente assunto che siano distinte) sono le soluzioni dell'equazione algebrica caratteristica:

$$\lambda^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)\lambda + \frac{2}{LC} = 0, \tag{204}$$

e K_+ e K_- sono le due costanti di integrazione. Esse devono essere determinate imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} K_+ + K_- &= v_c\left(0^+\right) = \frac{1}{C}, \\ \lambda_+K_+ + \lambda_-K_- &= \left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right). \end{aligned} \tag{205}$$

La seconda delle (205) è stata ottenuta usando la prima equazione del sistema (201) e le condizioni iniziali per lo stato (200). Pertanto, la soluzione del circuito in esame vale:

$$v_c(t) = \left(K_+ e^{\lambda_+ t} + K_- e^{\lambda_- t}\right)u(t). \tag{206}$$

Se la grandezza di interesse fosse diversa da quelle di stato, ad esempio, l'intensità di corrente $i(t)$ che attraversa il resistore che collega il condensatore all'induttore (Figura 7.50), allora, bisognerebbe determinare prima l'evoluzione delle grandezze di stato e, poi, usando il circuito resistivo associato determinare la grandezza di interesse. Applicando la prima legge di Kirchhoff si ha

$$i(t) = i_L(t) - \delta(t). \tag{207}$$

L'intensità di corrente che attraversa l'induttore è uguale a zero <u>per t<0</u>; <u>per t>0</u> è legata alla tensione del condensatore tramite l'equazione

$$i_L = -C\frac{dv_c}{dt} - \frac{v_c}{R}. \tag{208}$$

La (208) è stata ottenuta dalla prima equazione del sistema (201). Sostituendo nella (208) l'espressione (206), si ottiene:

$$i_L = -\left(C\lambda_+ + \frac{1}{R}\right)K_+ e^{\lambda_+ t} - \left(C\lambda_- + \frac{1}{R}\right)K_- e^{\lambda_- t} \quad per\ t > 0. \tag{209}$$

Pertanto la soluzione cercata vale:

$$i(t) = -\left[\left(C\lambda_+ + \frac{1}{R}\right)K_+ e^{\lambda_+ t} + \left(C\lambda_- + \frac{1}{R}\right)K_- e^{\lambda_- t}\right]u(t) - \delta(t). \tag{210}$$

Quando la grandezza di interesse non è una variabile di stato, la soluzione può contenere un impulso di Dirac, applicato nello stesso istante in cui è applicato l'impulso del generatore.