



Università degli Studi di Cassino

Facoltà di Ingegneria

Le resistenze al moto

Note ad uso degli allievi dei corsi di
Idraulica e Meccanica dei Fluidi

Premessa

Questi appunti sono destinati agli studenti dei corsi di Idraulica I (Ingegneria Civile) e Meccanica dei Fluidi (Ingegneria Meccanica) della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Cassino. In essi sono sintetizzati i concetti basilari relativi al calcolo delle resistenze in moto uniforme nelle tubazioni, fondamentali per la soluzione dei problemi di progetto e verifica delle condotte.

Nel testo è individuato, mediante il carattere più grande, un percorso di “minima resistenza” nello studio. Gli approfondimenti, che possono essere saltati in una prima fase dello studio, sono in caratteri più piccoli.

Cassino, febbraio 2003.

La prima versione di questi appunti è stata scritta nel 2002, a quattro mani con il prof. Rudy Gargano e dietro suo stimolo. Dopo alcuni anni di “prova su campo” ho sentito il bisogno di ristrutturarli, in particolare per quanto concerne la delicata questione delle resistenze in moto turbolento, con una esposizione che seguisse la “storia” delle ricerche in tale campo. Mi assumo pertanto ogni responsabilità relativa alla presenza di refusi o alla cattiva esposizione di alcuni argomenti, ringraziando in anticipo quanti volessero segnalarmeli.

Cassino, novembre 2005

Angelo Leopardi

1^a edizione: 25 marzo 2002.

2^a edizione: 8 luglio 2002.

3^a edizione: 21 gennaio 2003.

4^a edizione: 01 novembre 2005.

Indice

1. Prima di iniziare pag.	4
2. L'esperienza di Reynolds pag.	5
3. Il moto laminare pag.	7
4. Il moto turbolento pag.	8
5. La previsione del regime di moto: il numero di Reynolds pag.	11
6. Le resistenze al moto: l'indice di resistenza pag.	12
6.1 Moto turbolento di tubo liscio pag.	13
6.2 Moto turbolento di tubo scabro pag.	14
6.3 Moto turbolento di transizione pag.	14
6.4 L'abaco di Moody pag.	15
6.5 Il substrato laminare pag.	16
6.6 Uso della formula di Darcy – Weisback pag.	18
6.7 La formula di Swaame e Jain pag.	18
6.8 Il raggio idraulico: l'estensione sezioni non circolari pag.	19
7. Le altre formule di resistenza del moto uniforme pag.	19
Lista dei simboli pag.	22
Bibliografia pag.	23

1. Prima di iniziare ...

Le condotte in pressione, normalmente di sezione circolare, costituiscono il mezzo fondamentale per il trasporto di fluidi nei campi dell'ingegneria civile e industriale. Per poter effettuare i calcoli necessari al loro progetto o verifica è di fondamentale importanza la valutazione delle resistenze al moto del fluido che in esse scorre.

Questo fascicolo è dunque dedicato allo studio dei possibili regimi di moto che possono verificarsi e degli strumenti operativi per la valutazione delle suddette resistenze. Di seguito si discuterà delle sole resistenze "continue", mentre non si esamineranno quelle dovute a fenomeni localizzati. Inoltre si studieranno solamente condizioni di moto permanente.

Prima di procedere pare opportuno richiamare che è d'uso comune, in condizioni di moto permanente, rappresentare le resistenze al moto mediante il concetto di perdita di carico per unità di percorso, o cadente idraulica. Essa viene solitamente indicata con il simbolo J ed è definita come:

$$(1) \quad J = -\frac{dH}{ds}$$

dove H è il carico idraulico e s l'ascissa curvilinea lungo la tubazione. In moto uniforme essa è costante lungo il percorso, per cui si può scrivere anche come:

$$(2) \quad J = -\frac{dH}{ds} = \frac{h_f}{L}$$

dove h_f rappresenta la perdita di carico complessiva nel tratto di lunghezza L .

Qualunque sia il regime di moto (si veda il seguito) si dimostra che la distribuzione degli sforzi tangenziali lungo l'asse di una condotta circolare è data dalla seguente espressione:

$$(3) \quad \tau(r) = \gamma \frac{r}{2} J = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

dove γ è il peso specifico del fluido, r distanza dell'asse della condotta a sezione circolare, r_0 il raggio della condotta e τ_0 lo sforzo tangenziale alla parete, $\tau_0 = \gamma r_0 / 2 J$.

Da quest'ultima relazione è immediato constatare come a J possa, in effetti, attribuirsi anche un altro significato, e cioè quello di forza resistente che agisce sull'unità di peso del fluido. Questo concetto, coincidente con quello di cadente idraulica nel moto uniforme, risulta particolarmente importante in condizioni di moto vario.

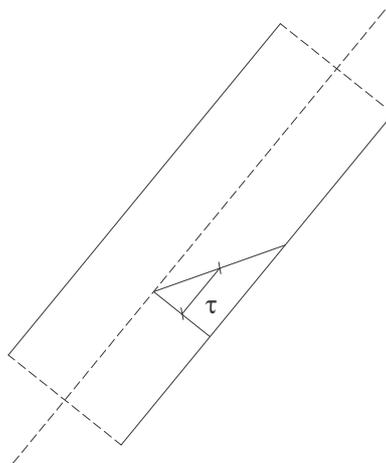


Fig. 1
Distribuzione degli sforzi tangenziali

La (3) mostra inoltre che la distribuzione degli sforzi tangenziali risulta lineare lungo un raggio, e precisamente nulla in asse e massima alla parete, Fig.1.

Per ottenere la (3) si può applicare l'equazione globale dell'idrodinamica ad un cilindretto coassiale con la condotta, di raggio r . Con riferimento alla Fig.2, in ipotesi di moto permanente e proiettando lungo l'asse x del moto si perviene alla:

$$\Pi_1 + M_1 - \Pi_2 - M_2 - T - G \sin \alpha = 0$$

dove con Π si indicano le spinte idrostatiche sulle sezioni 1 e 2, con M i flussi di quantità di moto, con T la forza agente sul contorno laterale, in direzione x , con G il peso della massa fluida contenuta nel volumetto di controllo.

Essendo il moto uniforme le quantità di moto M_1 e M_2 , rispettivamente della portata entrante e della portata uscente, sono uguali fra loro, e pertanto la loro differenza è nulla. Sostituendo i valori delle spinte idrostatiche e del peso si ricava T , dividendone il valore per l'area della superficie laterale si ottiene lo sforzo tangenziale:

$$\tau(r) = \frac{T}{2\pi r L} = \frac{\gamma \pi r^2 L J}{2\pi r L} = \gamma \frac{r}{2} J = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

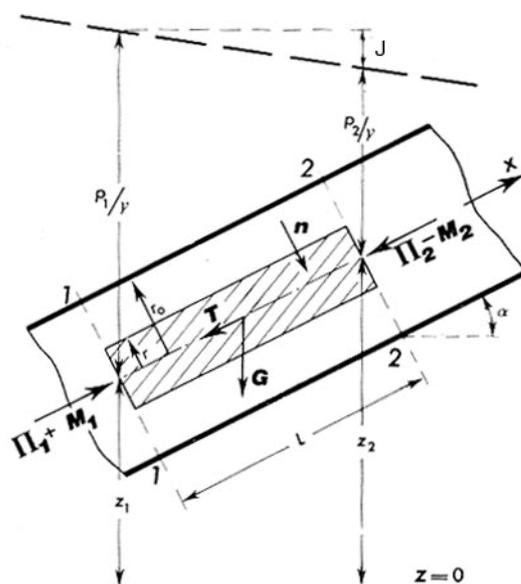


Fig. 2
Sforzi tangenziali nelle tubazioni (rielaborazione da Citrini e Nosedà, 1987)

2. L'esperienza di Reynolds

I primi interessanti lavori sulle resistenze al moto nelle tubazioni risalgono al matematico e ingegnere britannico Osborne Reynolds (1883), che misurò la perdita di carico in tubazioni di differente lunghezza e diametro, con vari valori di portata.

Nella fattispecie, Reynolds tramite un impianto sperimentale costituito unicamente da una tubazione collegante due serbatoi (Fig.3), constatò che per modesti valori di portata vi era diretta proporzionalità fra la perdita di carico e la portata fluente, vale a dire che al raddoppiarsi della portata si otteneva il raddoppio della perdita di carico.

Però, tale tipo di legame non risultava sempre valido per descrivere il deflusso attraverso la condotta. Infatti, per la stessa condotta, al crescere della portata questo comportamento cambiava e, per elevati valori di portata, la perdita di carico tendeva ad essere proporzionale al quadrato della stessa portata; così al raddoppiarsi di questa la perdita di carico si quadruplicava.

Da ciò Reynolds evinceva che esistono due differenti regimi di moto: **moto laminare** e **moto turbolento**, ai quali corrispondono differenti formule per il calcolo della perdita di carico.

Al fine di evidenziare chiaramente l'esistenza di due differenti regimi di moto, Reynolds realizzò la condotta dell'attrezzatura sperimentale di Fig.3 con un tubo trasparente e predispose un apposito iniettore per l'immissione di un sottile getto di colorante nell'acqua fluente attraverso la condotta.

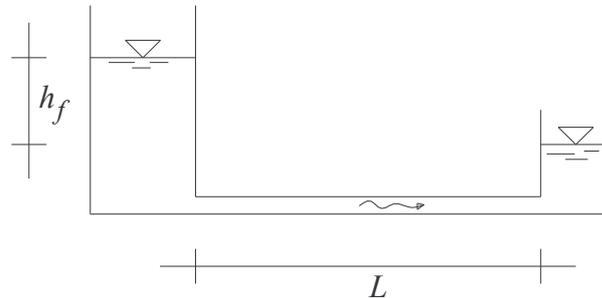


Fig. 3
Schema di impianto sperimentale per l'esperienza di Reynolds

Il colorante, con peso specifico poco dissimile da quello dell'acqua, era trascinato dal fluido visualizzando per modesti valori di portata le traiettorie delle particelle fluide (Fig.4).

Infatti, quando l'acqua muoveva lentamente, il getto di colorante descriveva una traiettoria rettilinea e ben definita lungo il tubo, denotando che all'interno della condotta si stava realizzando un regime di moto del tipo *laminare*.

Esso può essere pensato come se l'acqua si muovesse attraverso una serie di strati sottili paralleli, alla stessa maniera di un mazzo di carte da gioco, ciascuno scorrendo sull'altro, e con il getto di colorante inserito fra due di questi strati.

Si definisce moto laminare (o *viscoso*, o *regolare*) quel particolare tipo di movimento dei fluidi caratterizzato dall'assenza di componenti caotiche, per cui le traiettorie effettive delle particelle fluide risultano regolari. Quando la corrente ha direzione rettilinea anche le traiettorie sono rettilinee, e ad esse si raccordano quando la presenza di una condotta curva, ad esempio, impone variazioni della direzione.

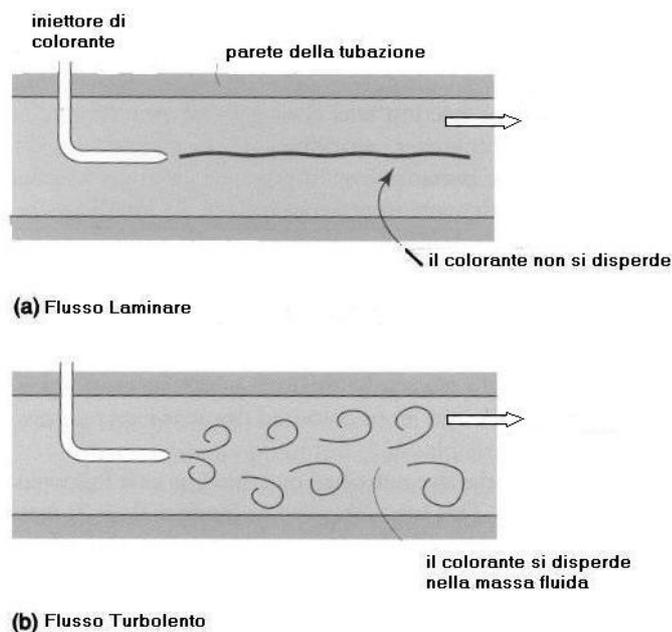


Fig. 4
Moto laminare e moto turbolento (rielaborazione da M.Kay, 1998)

Incrementando la velocità media di portata si osserva che il getto di colorante immesso si sfiocca, rompendosi in una moltitudine di percorsi casuali per cui il tracciante colorato si disperde nell'intera corrente (Fig.4).

Ciò denota in modo evidente che le traiettorie delle particelle fluide non sono più costantemente parallele all'asse della condotta, come avviene nel regime laminare. Siffatto movimento delle particelle fluide rientra nel regime di moto *turbolento*.

3. Il moto laminare

In moto laminare la distribuzione delle velocità u in condotte circolari è di tipo parabolico rispetto alla sezione della condotta, ed è data dalla relazione

$$(4) \quad u = \frac{\gamma J}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) \quad \left[u \propto \left(\frac{\gamma}{\mu}, J, r^2 \right) \right]$$

dove: D diametro della tubazione e μ viscosità.

La (4) può essere dedotta eguagliando l'espressione che fornisce gli sforzi tangenziali in funzione del gradiente delle velocità (legge di Newton, $\tau = -\mu du/dr$) con la relazione che fornisce la distribuzione degli sforzi tangenziali in funzione della cadente J e della distanza del punto dall'asse della condotta, $\tau = \gamma r/2$ (cfr. § Prima di iniziare...).

Necessario per il conseguimento della (4) sono state le constatazioni sperimentali mediante le quali si è dedotto che la velocità è nulla per le traiettorie a contatto con la parete interna delle tubazioni.

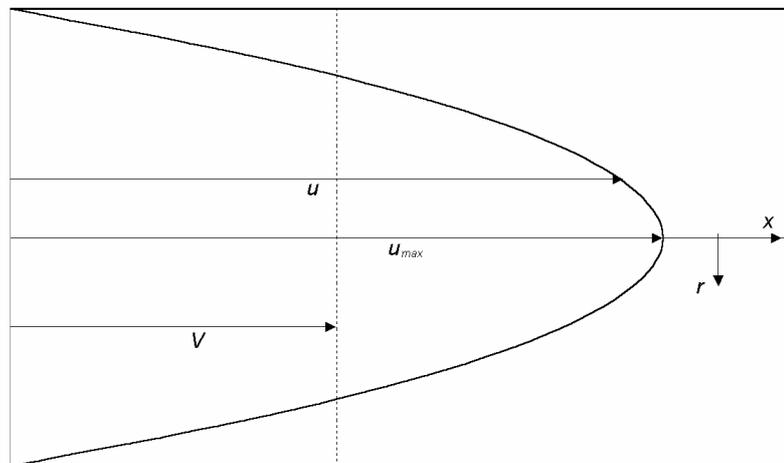


Fig. 5
Distribuzione di velocità in moto laminare

In Fig.5 si riporta qualitativamente il diagramma delle velocità per un generico piano passante per l'asse della condotta.

Dalla (4) si ottiene che il valore della velocità massima u_{max} si verifica in asse ed è pari a

$$(5) \quad u_{max} = \frac{1}{16} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 \quad \left[u_{max} \propto \left(\frac{\gamma}{\mu}, J, D^2 \right) \right]$$

Invece, integrando la (4) rispetto alla sezione della condotta si ottiene la portata

$$(6) \quad Q = \frac{\pi \gamma J}{128 \mu} D^4 \quad \left[Q \propto \left(\frac{\gamma}{\mu}, J, D^4 \right) \right]$$

Dividendo la (6) per l'area della sezione della tubazione σ si ottiene la velocità media di portata

$$(7) \quad V = \frac{Q}{\sigma} = \frac{1}{32} \frac{\gamma J}{\mu} D^2 = \frac{1}{2} u_{max} \quad \left[V \propto \left(\frac{\gamma}{\mu}, J, r^2 \right) \right]$$

La (6) pone in evidenza che la portata è direttamente proporzionale alla cadente dell'energia totale, per cui in condizioni di moto uniforme ($J=cost$) la portata è direttamente proporzionale anche alla perdita di carico. Pertanto, la (6) conferma per via teorica quanto ottenuto da Reynolds sperimentalmente.

Dalla (7) si evince che, in regime di moto laminare, tra la velocità media di portata e la perdita di carico vi è un legame funzionale di tipo lineare.

Fatta eccezione per particolari condizioni di flusso (ad esempio il moto dell'acqua in un mezzo poroso o il flusso sanguigno del nostro corpo), questo regime di moto, tuttavia, non è di grande interesse per gli ingegneri, poiché risulta essere estremamente infrequente sia nelle opere civili sia in quelle tipiche dell'ingegneria industriale.

4. Il moto turbolento

Nel regime turbolento, il moto delle particelle può essere inteso come somma di due tipi di movimento. Al *moto di trasporto*, diretto secondo l'asse della tubazione, si sovrappone un movimento caotico e disordinato che viene definito *moto di agitazione*.

Se unicamente il primo tipo di moto determina il trasporto della massa fluida, la turbolenza non fornisce alcun contributo alla formazione della portata, poiché le particelle fluide, a seguito della componente di agitazione, si spostano sostanzialmente dall'asse della tubazione verso la parete interna della condotta e viceversa.

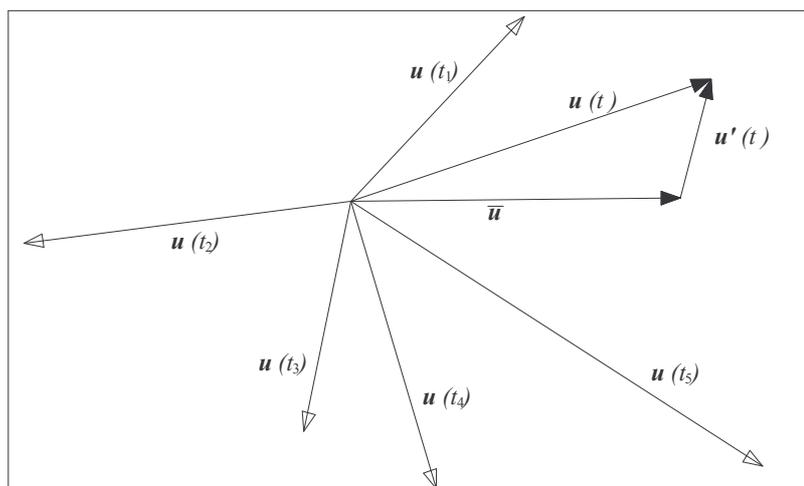


Fig. 6
Velocità media locale e componenti di agitazione turbolenta

In regime di moto turbolento, anche in condizioni di moto uniforme, la misura di velocità in un generico punto della corrente mostra valori del vettore velocità u continuamente differenti (Fig.6). Ciò induce a definire la *velocità media locale* (o *velocità di trasporto*):

$$(8) \quad \bar{u} = \frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} u dt$$

vettore con direzione parallela all'asse della tubazione, che in moto uniforme, o quantomeno permanente, è indipendente dal tempo.

Affinché la (8) possa valutare correttamente la velocità media locale è opportuno che l'intervallo di tempo ΔT sia sufficientemente ampio perché \bar{u} possa ritenersi costante.

Il valore di ΔT da attribuire a ciascun moto turbolento può essere, ad esempio, definito con un approccio euristico, per cui assunto un valore di primo tentativo ΔT_0 modesto, mediante la (8) si valuta \bar{u}_0 . Quindi, con riferimento all'intervallo di tempo $\Delta T_1 = \Delta T_0 + \delta t$, si valuta nuovamente \bar{u}_1 . Se l'intervallo temporale iniziale è stato assunto sufficientemente piccolo si ha che $\bar{u}_0 \neq \bar{u}_1$ e, quindi, si deduce che ΔT_0 non è sufficiente per calcolare correttamente la velocità media locale.

Pertanto, occorre incrementare ulteriormente l'intervallo temporale, $\Delta T_2 = \Delta T_1 + \delta t$, e con riferimento ad esso, si valuta la velocità media locale \bar{u}_2 . Quest'ultimo verrà successivamente confrontata con la \bar{u}_1 .

Il procedimento si itera sino a quando all'i-esimo step si realizza l'uguaglianza $\bar{u}_{i-1} = \bar{u}_i$, per cui ΔT_{i-1} , può essere assunto quale intervallo temporale strettamente necessario per il calcolo della velocità media locale mediante la (8).

Sulla base della definizione della velocità media locale, si può definire la velocità istantanea in qualità di risultante della somma vettoriale (fig.6)

$$(9) \quad \mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'(t)$$

dove \mathbf{u}' rappresenta la componente istantanea di agitazione, il cui valore medio temporale, come può essere dedotto sostituendo la (9) nella (8), risulta essere nullo

$$(10) \quad \bar{\mathbf{u}}' = \frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} \mathbf{u}' dt = 0$$

È, pertanto, evidente che la componente velocità di trasporto è la sola componente di velocità che contribuisce alla formazione della portata e dunque del trasporto di massa.

A rigore, la continua variabilità dei vettori velocità in tutti i punti del campo di moto, imporrebbe di considerare il moto turbolento come moto vario. Tuttavia, quando il solo moto di trasporto lo consenta, un moto turbolento può essere classificato permanente o addirittura uniforme.

Più precisamente, quando la distribuzione delle velocità medie locali $\bar{\mathbf{u}}$ è indipendente dal tempo (conseguentemente anche le velocità medie temporali sono indipendenti dal tempo) il moto turbolento è definito permanente.

Se, inoltre, per ciascuna traiettoria le velocità medie locali $\bar{\mathbf{u}}$ sono costanti in tutti i punti¹, il moto turbolento si definisce uniforme.

¹ Affinché possa essere vera la suddetta definizione di moto uniforme, le traiettorie devono essere rettilinee. Ad esempio, le traiettorie che si realizzano in una condotta.

Appurato che l'agitazione turbolenta non fornisce alcun contributo al trasporto di massa, come palesemente evidenziato dalla (10), tuttavia essa modifica significativamente rispetto al regime laminare sia lo stato tensionale, e nella fattispecie gli sforzi tangenziali, sia la distribuzione delle velocità medie locali.

Infatti, l'agitazione turbolenta dà luogo a numerosissimi urti tra le particelle fluide con conseguenti scambi di quantità di moto tra le particelle fluide. Pertanto, le particelle fluide che si muovono dalla zona prossima all'asse (zona con i valori più elevati di velocità) verso le pareti della tubazione (zona con i valori più bassi di velocità) cedono quantità di moto alle particelle contro le quali impattano.

Ciò implica, con riferimento alla sezione ortogonale alla corrente, l'attenuazione delle differenze delle velocità tra i punti prospicienti rispetto alle condizioni di moto laminare.

La Fig.7 mostra l'effetto dell'agitazione turbolenta sulla distribuzione di velocità, poiché, con riferimento ad una sezione di tubazione circolare, riporta i diagrammi delle velocità in ipotesi di moto turbolento e laminare.

Come si evince dalla figura, l'agitazione turbolenta implica l'appiattimento del diagramma $\bar{u}(r)$ rispetto alla distribuzione di velocità che si realizza in condizioni di moto laminare. Ciò è confermato dalle misure puntuali delle velocità effettuate in condotte circolari, che hanno dimostrato che la velocità massima in condizioni di moto turbolento è pari 1.15÷1.25 la velocità media di portata V , a fronte di $u_{max}=2V$ in ipotesi di moto laminare.

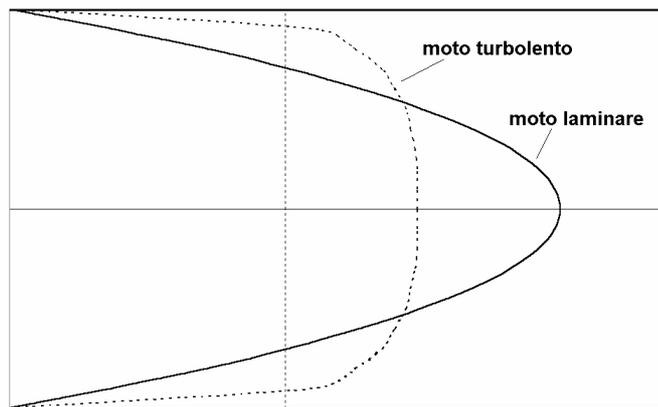


Fig. 7
Confronto fra i diagrammi di velocità media locale in moto laminare e turbolento

Per quanto concerne lo stato tensionale, il flusso di quantità di moto che si instaura tra le diverse superfici cilindriche in asse con la condotta fa insorgere un sforzo tangenziale aggiuntivo, tipico del regime turbolento, definito *sforzo tangenziale alla Reynolds* (oppure *sforzo tangenziale turbolento*).

$$(11) \quad \tau_{Re} = \overline{\rho u'v'} = \frac{1}{\Delta T} \rho \int_{\Delta T} u'v' dt$$

dove u' e v' rappresentano la componente di agitazione istantanea della velocità, rispettivamente secondo l'asse x (coincidente con l'asse della tubazione) e secondo l'asse y (ortogonale alle superfici cilindriche coassiali con la tubazione); il termine $\overline{u'v'}$ rappresenta la media temporale del prodotto delle due componenti di agitazione.

Lo *sforzo tangenziale viscoso* τ_{μ}

$$(12) \quad \tau_{\mu} = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr}$$

che costituisce la componente tangenziale dello stato tensionale del regime laminare², risulta presente anche nei regimi turbolenti, per cui lo sforzo tangenziale complessivo per questi ultimi è dato dalla somma:

$$(13) \quad \tau = \tau_{Re} + \tau_{\mu}$$

La distribuzione degli sforzi tangenziali $\tau(r)$ nella sezione trasversale della corrente è in ogni caso quella lineare data dalla (3), Fig.8.

In moto turbolento il contributo allo sforzo tangenziale di ciascuna delle due componenti è variabile lungo un diametro.

Nella fattispecie, in asse alla condotta gli sforzi di Reynolds sono nulli, infatti non vi è ragione alcuna per la quale debba prevalere il flusso di quantità di moto in una o nell'altra direzione trasversalmente all'asse stesso, che è un asse di simmetria polare. Pertanto in asse risultano identicamente nulli gli sforzi totali, quelli di Reynolds e quelli viscosi.

In prossimità della parete la componente trasversale della velocità risulta identicamente nulla, se infatti non fosse così si violerebbe la condizione di non attraversabilità delle pareti impermeabili e, in definitiva, il principio di conservazione della massa. Pertanto anche l'agitazione turbolenta v' è identicamente nulla in parete, e dunque anche gli sforzi di Reynolds.

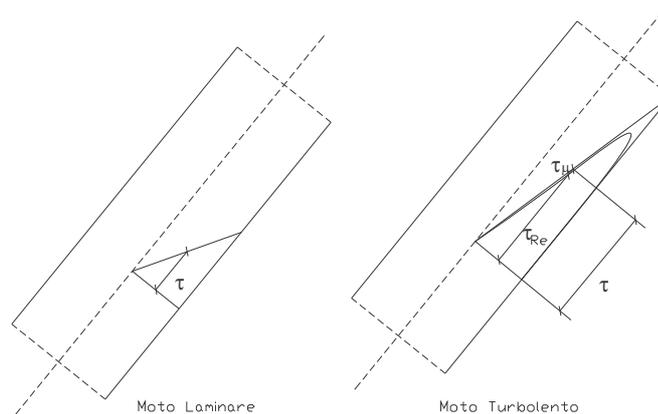


Fig. 8
Sforzi tangenziali in moto laminare e turbolento

Per questo motivo in parete gli sforzi tangenziali coincidono con quelli viscosi; in tutto il resto della corrente gli sforzi di Reynolds risultano largamente prevalenti su quelli viscosi, e possono essere praticamente identificati con gli sforzi totali, Fig. 8.

5. La previsione del regime di moto: il numero di Reynolds

A questo punto è chiara la distinzione fra i due regimi di moto, ma non come sia possibile una previsione di quale dei due si verificherà in date circostanze. La velocità è ovviamente importante: al crescere di essa si ha la transizione dal regime di moto laminare a quello di moto turbolento; tuttavia gli esperimenti suggerivano che essa non dovesse essere il solo fattore in gioco. Fu Reynolds il primo a ipotizzare che il tipo di moto dovesse dipendere non solo dalla velocità (V), ma anche dalla densità di massa (ρ), dalla viscosità (μ) e dal

² La τ_{μ} valutata per i regimi turbolenti si differenzia dallo sforzo tangenziale calcolato per i regimi laminari, in ragione del fatto che porta in considerazione le velocità medie.

diametro della tubazione (D). Egli arrangiò insieme questi fattori ottenendo un parametro adimensionale che oggi chiamiamo **numero di Reynolds**, in riconoscimento del suo lavoro:

$$(14) \quad Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Già l'esperienze condotte da Reynolds mostrarono che non poteva essere determinato un preciso valore di Re in corrispondenza del quale si realizzava il passaggio dal moto laminare a quello di tipo turbolento, ma al più poteva essere definito un intervallo di valori $Re=2000\div 4000$. In riferimento a tale intervallo, si può, quindi, affermare che:

- per $Re < 2000$ il moto è sempre laminare
- per $Re > 4000$ il moto è sempre turbolento.

Ad ulteriore conferma della difficoltà nello studio della transizione del regime di moto laminare e quello turbolento, le esperienze condotte nella zona di passaggio hanno dimostrato che le modalità di prova incidono significativamente sullo stesso regime di movimento. Infatti, se si effettua l'esperienza di Reynolds partendo da un valore di $Re < 2000$ e si incrementa la portata con estrema gradualità e accuratezza, si riesce a realizzare il moto laminare anche per valori Re significativamente maggiori a 4000.

Come già evidenziato, il moto laminare presenta scarso interesse pratico rispetto a quello di moto turbolento.

Infatti, si consideri, ad esempio, un generico caso di studio, quale può essere quello di una condotta di diametro $D = 300 \text{ mm}$ per l'adduzione di una portata d'acqua $Q = 70.7 \text{ l/s}$, e velocità media di portata³ sia $V = 1 \text{ m/s}$. In tali condizioni di deflusso, la corrente presenta un numero di Reynolds $Re = 300000$ che denota quanto sia improbabile il regime di moto laminare per i sistemi di adduzione di pratico interesse.

6. Le resistenze al moto: l'indice di resistenza

Per quanto concerne le resistenze al moto, in condizioni di moto turbolento non è possibile ripetere la procedura vista per il moto laminare, che consente di legare la portata defluente in condotta alla cadente. Infatti, in tali condizioni, lo sforzo tangenziale totale dipende anche dagli sforzi di Reynolds, che sono funzione delle velocità di agitazione.

Per tale motivo è stato necessario ricorrere ad un approccio di tipo sperimentale. Sia in condizioni di moto laminare sia di moto turbolento è ragionevole supporre che lo sforzo tangenziale totale debba dipendere dalle caratteristiche del fluido (se incomprimibile basteranno la densità ρ e la viscosità μ), dalle caratteristiche del moto (la velocità media di portata V) e dalle caratteristiche della tubazione (il diametro D ed una misura della scabrezza della parete, che rappresenteremo con una grandezza lineare ε).

In sintesi lo sforzo tangenziale (e dunque J) dovrà dipendere da parametri:

- **fisici** – μ e ρ – caratterizzanti il fluido in movimento;
- **cinematici** – V o Q – caratterizzanti il trasporto di massa fluida;
- **geometrici** – D e ε – caratterizzanti la tubazione e la scabrezza.

Pertanto scriveremo il legame funzionale simbolico:

$$(15) \quad \tau_o = \tau_o(\rho, \mu, V, D, \varepsilon)$$

³ Solitamente i sistemi di adduzione in pressione sono dimensionati prevedendo valori di velocità media di portata dell'ordine del 1m/s.

nel quale si è già tenuto conto che la portata è univocamente definita da V e D .

Tali grandezze non sono però indipendenti tra loro, dovendo essere legate da tre relazioni di coerenza dimensionale. Pertanto il legame funzionale (15), fra sei grandezze dimensionali, può essere riscritto come legame fra tre grandezze adimensionali che contengano le sei grandezze dimensionali.

Una adimensionalizzazione dello sforzo tangenziale può essere fatta introducendo l'indice di resistenza λ , definito dalla formula **Darcy-Weisback**, che, per condotte in pressione di forma circolare, si scrive:

$$(16) \quad \lambda = \frac{2g}{V^2} DJ$$

dove, ovviamente, J è direttamente legata a τ_o da $\tau_o = \gamma D/4 J$.

Un numero adimensionale che contiene quattro delle altre cinque grandezze è il numero di Reynolds, definito dalla (14). L'altra grandezza adimensionale dovrà pertanto contenere ε , sceglieremo ε/D , che chiameremo scabrezza relativa, e che fornisce la misura della scabrezza rapportata al diametro della tubazione.

Pertanto una relazione funzionale equivalente alla (15) è:

$$(17) \quad \lambda = f(Re, \varepsilon/D)$$

In moto laminare è immediato osservare che la forma della (17) è:

$$(18) \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

Per ottenere l'equazione del regime laminare (18) è sufficiente sostituire la cadente che compare nella (7), con l'espressione di J dedotta dalla formula di Darcy-Weisbach (16).

Si osservi come in moto laminare l'indice di resistenza non dipenda pertanto dalla scabrezza relativa.

Nel seguito saranno esposti, secondo un criterio storico, i principali risultati sperimentali che hanno permesso di giungere alla conoscenza della relazione funzionale (17) per il moto turbolento.

6.1 Moto turbolento di tubo liscio

Le esperienze condotte da Paul Blasius (1913) posero in evidenza che l'indice di resistenza pareva comportarsi, in moto turbolento, in maniera più semplice di quanto prevedibile dalla (17), poiché la λ risultava dipendere, come nel moto laminare, unicamente dal numero di Reynolds secondo la relazione (19), che nel piano bi-logaritmico presenta andamento lineare⁴.

$$(19) \quad \lambda = \frac{0.316}{Re^{0.25}}$$

Pochi anni dopo, Prandtl e von Karman ottennero sempre per il moto turbolento di tubo liscio una relazione che forniva ancora l'indice di resistenza in funzione del solo numero di Reynolds, sebbene la sua struttura fosse più complicata della (19).

⁴ $\log \lambda = \log 0.316 - 0.25 \log Re$

$$(20) \quad \frac{f}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2.5l}{Re \sqrt{\lambda}}$$

I diversi studi condotti sul regime di tubo liscio hanno dimostrato che la (20) approssima meglio i punti sperimentali. Tuttavia, quantunque la (20) sia strutturalmente differente dalla (19), essa poco si discosta dalla relazione di Blasius e le differenze diventano apprezzabili solo per elevati valori di Re .

6.2 Moto turbolento di tubo scabro

Alcuni anni dopo le esperienze di Blasius e Prandtl e von Karman, Johann Nikuradse (1930) realizzò misure su tubazioni rese artificialmente scabre mediante l'incollaggio sulla loro superficie interna di una sabbia praticamente monogranulare.

Osserviamo come tale tecnica consentiva una definizione univoca della scabrezza ε . Per le tubazioni commerciali, aventi scabrezza non uniforme, definiremo ε scabrezza equivalente in sabbia, pari al valore di scabrezza uniforme che fornisce le stesse resistenze al moto della scabrezza reale non uniforme.

Le esperienze di Nikuradse portarono ad un risultato apparentemente difforme da quelli precedenti., Egli osservò che l'indice di resistenza dipendeva unicamente dalla scabrezza relativa. Pertanto, il valore di λ poteva ritenersi praticamente costante rispetto a Re , secondo la seguente relazione

$$(21) \quad \frac{f}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{f}{3.71 D} \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

6.3 Moto turbolento di transizione

Era pertanto evidente la difformità fra i risultati sperimentali conseguiti.

Fu lo stesso Nikuradse a chiarire la ragione di tale difformità: in realtà i risultati erano entrambi corretti, ma si riferivano a differenti "regimi turbolenti", in quanto il campo di indagine era stato differente.

In maggiore dettaglio le condizioni di esercizio oggetto delle indagini di Blasius furono caratterizzate da condotte con scabrezze relative molto basse (furono impiegate tubazioni in ottone con parete interna molto levigata), cui corrisposero valori di Re relativamente contenuti (i bassi valori di $Re = 4000 \div 10000$ dipesero sostanzialmente dai modesti valori dei diametri delle condotte impiegate nelle prove da Blasius).

Le prime prove di Nikuradse erano state invece condotte per scabrezze decisamente superiori, e con tubazioni di notevole diametro. Alle due differenti condizioni diamo oggi il nome di moto turbolento di tubo liscio e tubo scabro rispettivamente.

Ulteriori indagini misero in evidenza come fra i due differenti regimi turbolenti (tubo liscio e tubo scabro) vi sia una regione di transizione (moto turbolento di transizione). Per tale regime l'indice di resistenza dipende sia dal numero di Reynolds sia dalla scabrezza della tubazione.

Il comportamento in questa zona fu investigato da C.F. Colebrook e C.M. White, all'Imperial College di Londra negli anni '30, che svilupparono una formula in grado di coprire questa zona:

$$(22) \quad \frac{f}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg_{10} \left(\frac{2.5l}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{f}{3.71 D} \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

In realtà l'efficacia della (22) va ben oltre l'ambito di studio del solo moto turbolento di transizione, consentendo di studiare tutti i regimi di moto turbolenti. Infatti, come può evincersi dalla struttura della (22), per modesti valori di Re (condizioni di moto turbolente prossime a quelle di tubo liscio), il primo addendo dell'argomento del logaritmo risulta significativamente maggiore del secondo. Viceversa, per elevati valori di Re (condizioni di moto turbolente prossime a quelle di tubo scabro), il secondo addendo diventa predominante rispetto al primo.

6.4 L'abaco di Moody

I risultati esposti possono essere sintetizzati dalla rappresentazione grafica, riportata in Fig.9, denominata abaco di Moody. Si tratta di una rappresentazione in un piano bi-logaritmico $\lambda - Re$.

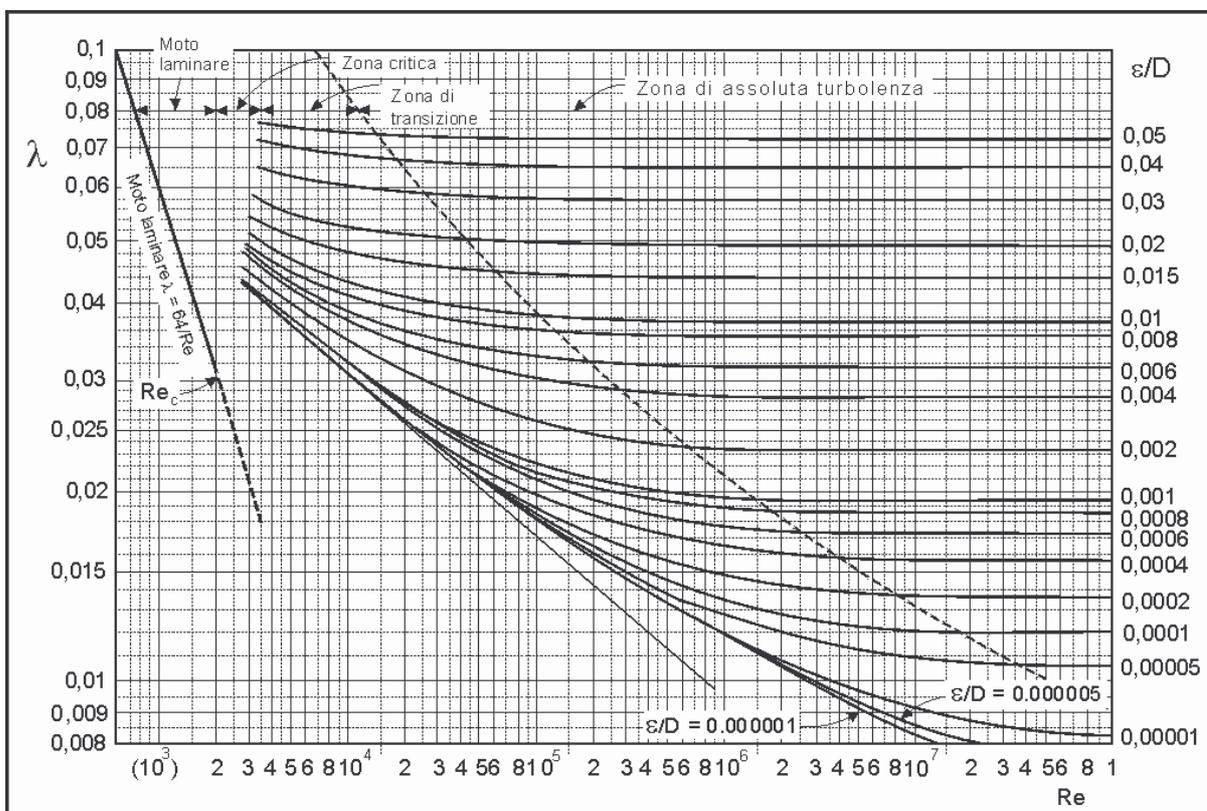


Figura 9
Abaco di Moody

L'abaco costituisce una sintetica rappresentazione dei differenti regimi di moto, nonché uno strumento atto alla valutazione delle resistenze al moto in qualsiasi condizione.

Osservando la parte sinistra della Fig.9 notiamo che le condizioni di moto laminare si realizzano per bassi valori del numero di Reynolds e si dispongono nel piano bi-logaritmico sulla retta di equazione (18).

Contrariamente a quanto osservato per il regime laminare, nel quale l'indice di resistenza è funzione unicamente del numero di Reynolds - $\lambda(Re)$ -, decisamente più complicata e articolata è la rappresentazione di λ per condizioni di moto turbolento.

Infatti, come può osservarsi dalla Fig.9, per $Re > 4000$ si distinguono numerose curve, contraddistinte ciascuna da un opportuno valore della scabrezza relativa ϵ/D , che

all'aumentare di Re si distaccano da una medesima retta, quella di Blasius, rappresentata dalla (19).

Più precisamente, al ridursi della ε/D , cresce il valore di Re per cui la relativa curva si distacca dalla (19).

Focalizzando l'attenzione su una delle curve dell'abaco, si osserva che una volta che questa si distacca dalla (19), si possono distinguere due andamenti: inizialmente la curva presenta una marcata concavità verso l'alto che all'aumentare di Re gradualmente si riduce sino a scomparire, facendo sì che l'andamento della curva possa ritenersi praticamente rettilinea ed orizzontale.

La sola analisi delle curve riportate in Fig.9 fa emergere che nell'abaco di Moody possono sostanzialmente distinguere tre zone, cui corrisponderanno tre specifici regimi di moto turbolento, come visto nei paragrafi precedenti, e che definiamo:

- moto turbolento di *tubo liscio*
- moto turbolento di *transizione*
- moto turbolento di *tubo scabro* (oppure moto *assolutamente/puramente turbolento*)

Pertanto nell'abaco di Moody le condizioni di tubo liscio sono rappresentate, come detto, dalla retta di Blasius (retta dei tubi lisci). Il distacco di una curva da tale retta, differente per ciascun valore di scabrezza relativa, indica il passaggio a condizioni di transizione. Le condizioni di moto turbolento di tubo scabro sono poi rappresentate da semirette parallele ed orizzontali ciascuna riferita ad un determinato valore di ε/D . Al crescere della scabrezza relativa aumenta anche l'indice di resistenza.

Quantunque possa risultare già chiaro, è opportuno rimarcare che con i termini *liscio* e *scabro* non si vuole indicare una proprietà intrinseca delle tubazioni, bensì si riferiscono alle condizioni del flusso della tubazione. Pertanto, è possibile avere, per la stessa tubazione, condizioni di flusso in tubo liscio o scabro.

Quindi, le tubazioni che possono apparire lisce al tatto possono comportarsi da scabre e viceversa. Tuttavia, le suddette definizioni dei due regimi di moto turbolento derivano dalla constatazione che una tubazione alquanto scabra al tatto avrà, in previsione del numero di Reynolds di esercizio, comportamento da tubo scabro.

6.5 Il substrato laminare

Dalle prime esperienze condotte da Reynolds, la tecnica sperimentale ha fatto notevoli passi in avanti, consentendo ai ricercatori di esaminare agevolmente il comportamento del flusso nei diversi punti del campo di moto. Ciò ha permesso di rilevare le grandezze idrodinamiche significative in prossimità delle pareti della tubazione e quindi di formulare una spiegazione fisica ai tre regimi di moto turbolento.

Più precisamente, le rilevazioni puntuali del campo di moto hanno consentito di scoprire che, anche in condizioni di moto turbolento, esiste un sottile strato di fluido, in prossimità delle pareti, caratterizzato dal regime laminare. Questo è chiamato **substrato laminare**.

Per bassi numeri di Reynolds il substrato laminare copre completamente la scabrezza della tubazione. Il moto è così non affetto dalla scabrezza della tubazione ma solo dalla viscosità nel substrato laminare. Il substrato laminare copre la scabrezza come un tappetino e protegge il flusso dalla scabrezza di parete. Questo è il regime dei tubi lisci, investigato da Blasius.

Lo spessore del substrato laminare non è però costante, esso diminuisce al crescere del numero di Reynolds, permettendo alle scabrezze maggiori di protendersi nella corrente.

Il flusso è ora influenzato sia dalla viscosità (che compare nel numero di Reynolds) sia dalla scabrezza di parete. Questa è la zona di transizione.

All'aumentare ancora del numero di Reynolds si ha praticamente la scomparsa del substrato laminare: a questo punto la scabrezza di parete diventa l'unico fattore influente sulle resistenze. Questa è la zona dei tubi scabri, investigata da Nikuradse.

Un'efficace rappresentazione grafica del substrato limite, in relazione ai differenti regimi di moto turbolento che si possono realizzare, è riportata in Fig.10. Le moderne tecniche di produzione delle tubazioni consentono oggi la realizzazione di condotte che presentano la parete interna alquanto liscia, ciò al fine di ridurre le perdite di carico. Per questo motivo le moderne tubazioni presentano ε/D più piccoli per cui le condizioni di esercizio più frequentemente ricadono nella zona di transizione.

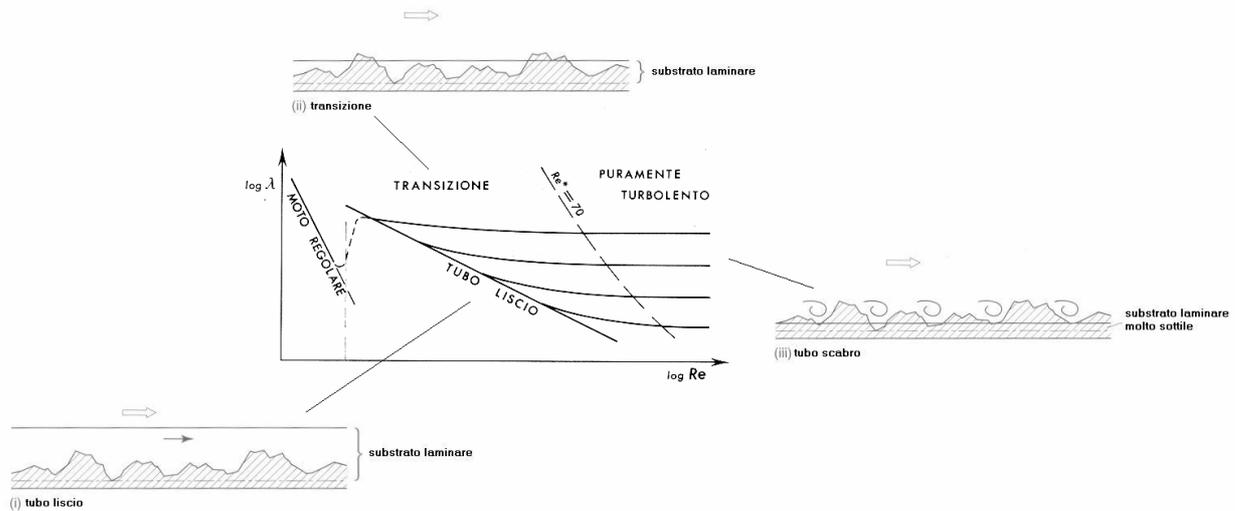


Figura 10
Substrato laminare

Alla luce dello studio del substrato limite viscoso, risulta più chiaro il numero di Reynolds e come esso, grazie alla sua struttura, sia in grado di portare in conto, a secondo delle condizioni di deflusso prese in esame, come la viscosità da un lato, e l'agitazione turbolenta dall'altro, influenzino le resistenze al moto.

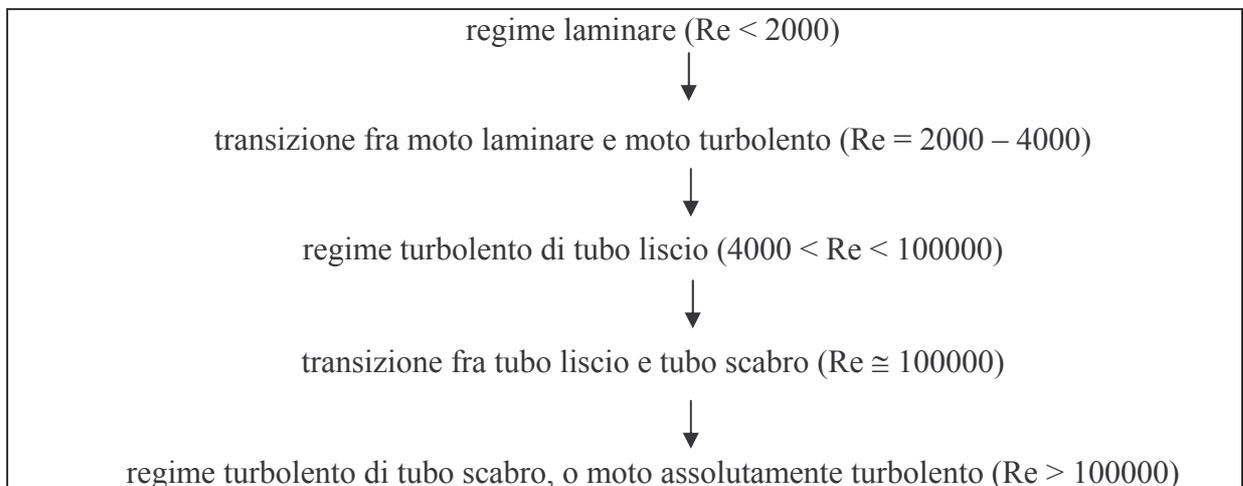


Figura 11
Regimi di moto

Infatti, bassi numeri di Reynolds ($Re < 2000$) implicano che la viscosità (μ) è grande rispetto al numeratore ρVD . Così la viscosità è importante in moti laminari, e non può essere ignorata. Elevati numeri di Reynolds ($Re > 4000$) sono invece caratterizzati dal verificarsi di un evento opposto: la viscosità è piccola rispetto al termine ρVD , e quindi meno importante in moto turbolento.

Nella Fig. 11 sono sintetizzati i possibili regimi di moto nelle tubazioni.

6.6 Uso della formula di Darcy-Weisback

La 15 può essere riscritta nel seguente modo:

$$(15b) \quad J = \frac{\lambda(Re, \varepsilon / D) V^2}{D \quad 2g}$$

che consente il calcolo della cadente nota la velocità (la portata). Infatti nota la velocità si calcola il numero di Reynolds, e dall'abaco di Moody si può a questo punto ricavare l'indice di resistenza. Ovviamente in luogo dell'abaco di Moody si può applicare la relazione 17, in moto laminare, o la relazione 21, in moto turbolento. Questa formula può essere applicata per il calcolo delle perdite di carico di un qualsiasi fluido newtoniano.

Nei calcoli di verifica occorre però ricavare la velocità (la portata) a partire dalla cadente, in tal caso nella 15b compaiono due incognite: la velocità e l'indice di resistenza.

In tal caso occorrerà procedere per tentativi. Assegnato un valore di tentativo V^* alla velocità si calcolerà il corrispondente numero di Reynolds Re^* . Da questo si ricaverà un valore λ^* dell'indice di resistenza. Applicando la 15b si calcolerà quindi un nuovo valore di velocità V^{**} . In generale questo valore sarà diverso da V^* , occorrerà quindi iterare il procedimento un certo numero di volte, arrestandosi quando il valore della velocità calcolata in due iterazioni successive differirà di meno di un'assegnata tolleranza.

6.7 La formula di Swamee e Jain

Una buona approssimazione dell'indice di resistenza λ da inserire nella formula di Darcy-Weisback può essere ricavata, oltre che dall'abaco di Moody o dalla formula di Colebrook e White, da una espressione ricavata da Swamee e Jain nel 1976, che ha il pregio di essere esplicita.

Tale formula ha un errore massimo dell'1 % rispetto a quella di Colebrook e White nel range

$$4 \times 10^3 < Re < 1 \times 10^8 \quad \text{e} \quad 1 \times 10^{-6} < \varepsilon/D < 1 \times 10^{-2}$$

L'espressione è la seguente:

$$(22) \quad \lambda = \frac{0.25}{\left[\lg_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

Grazie alla sua notevole semplicità questa formula è utilizzata in moltissimi dei pacchetti software disponibili per la verifica di reti in pressione (ad esempio Epanet 2 prodotto dalla US EPA).

6.8 Il raggio idraulico: l'estensione a sezioni non circolari

Per estendere le considerazioni precedenti a sezioni non circolari si introduce il concetto di **raggio idraulico**, definito come il rapporto fra l'area della sezione idrica (σ) e la lunghezza del perimetro della tubazione bagnato dall'acqua (perimetro bagnato o contorno lambito, indicato con il simbolo χ).

$$(23) \quad R = \frac{\sigma}{\chi}$$

Per tubazioni circolari si ha $R = D/4$. L'estensione dei discorsi precedenti a sezioni non circolari è fatta sostituendo al diametro (D) la quantità $4R$.

7. Le altre formule di resistenza del moto uniforme

Già precedentemente alle esperienze sul moto uniforme turbolento, differenti formule empiriche erano state sviluppate per le pratiche esigenze di progetto e verifica di sistemi di tubazioni e canali convoglianti acqua.

Queste formule sono ancora oggi di largo uso, pare quindi opportuno ricordarle per fornire al lettore gli strumenti di base per comprenderle.

Una di tali formule, ricavata sperimentalmente per le tubazioni in ghisa, è quella dovuta a Darcy, che si scrive:

$$(24) \quad J = \beta \frac{Q^2}{D^5}$$

dove β è un opportuno coefficiente, dipendente dal diametro della tubazione:
 $\beta = 0.00164 + 0.000042/D$.

Per condotte in acciaio bitumato Scimemi e Veronese hanno proposto:

$$(25) \quad J = 0.00141 \frac{Q^{1.82}}{D^{4.71}}$$

mentre Contessini propone, per condotte in acciaio nuove:

$$(26) \quad J = 0.0012 \frac{Q^2}{D^{5.26}}$$

e per condotte in acciaio in esercizio da molti anni:

$$(27) \quad J = 0.0020 \frac{Q^2}{D^{5.44}}$$

Si vuole far osservare che tutte queste formule presentano una struttura monomia del tipo:

$$(28) \quad J = \alpha \frac{Q^n}{D^m}$$

dove i coefficienti α , n e m sono da precisare. Il coefficiente n è in genere di valore inferiore a 2, mentre il coefficiente m ha valore intorno a 5. Il coefficiente α dipende dalla sola scabrezza delle tubazioni. La validità di queste formule è, per $n < 2$, per la zona di transizione fra tubi lisci e tubi scabri, per $n = 2$, per la zona dei tubi scabri (moto assolutamente turbolento).

Dal confronto fra la (27) e la formula di Darcy-Weisbach (15) si deduce che, in moto assolutamente turbolento è $n = 2$, per la curva dei tubi lisci si ottiene, invece, $n = 1.75$. La dimostrazione è lasciata per esercizio allo studioso lettore.

Una delle formule più antiche è quella di Chezy, proposta nel '700 per il calcolo delle correnti a pelo libero; l'estensione del suo impiego alle correnti in pressione è relativamente recente, risalendo soltanto al principio del XX secolo. Essa lega la cadente idraulica alle grandezze caratteristiche del moto nel seguente moto:

$$(29) \quad J = \frac{V^2}{C^2 R}$$

Il coefficiente C , denominato coefficiente di Chezy, ha le dimensioni di una lunghezza elevata a $\frac{1}{2}$ divisa per un tempo, cioè le dimensioni della radice quadrata di un'accelerazione. Esso dipende solo dalla scabrezza e dal raggio idraulico, e può essere stimato per mezzo della formula di Bazin:

$$(30') \quad C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma'}{\sqrt{R}}}$$

dove il coefficiente γ' dipende dalla scabrezza della parete, e può essere desunto da un qualsiasi manuale. Come si osserva esso è posto in relazione al raggio idraulico, così nella formula è implicita la considerazione della scabrezza relativa.

Un'altra formula utilizzata per stimare C è quella di Kutter, sostanzialmente analoga alla precedente:

$$(30'') \quad C = \frac{100}{1 + \frac{m'}{\sqrt{R}}}$$

dove il coefficiente m' è ancora una misura della scabrezza di parete, desumibile dalla lettura dei manuali.

Pare interessante osservare che, dal confronto fra la formula di Chezy e quella di Darcy-Weisbach può ricavarsi un legame fra C e λ :

$$(31) \quad C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

ciò implica che, siccome C è ritenuto indipendente dal numero di Reynolds, come si evince dalle formule di Bazin e di Kutter, la formula di Chezy può essere ritenuta valida solo nel regime dei tubi scabri, denominato anche regime di moto assolutamente turbolento.

Un'altra formula comunemente adottata è quella di Gauckler-Strickler, che si scrive:

$$(32) \quad J = \frac{V^2}{c^2 R^{4/3}}$$

in essa il coefficiente c dipende dalla sola scabrezza di parete, e può essere desunto ancora dalla lettura dei manuali tecnici. L'uso di tale formula presenta l'innegabile vantaggio di permettere, come le formule monomie descritte nel seguito, il calcolo di progetto per via diretta. Il coefficiente di Chezy e quello della formula di Gauckler-Strickler sono evidentemente legati dalla relazione:

$$(33) \quad C = cR^{1/6}$$

per cui il discorso sul campo di applicabilità della formula di Chezy si ripete parimenti per quella di Gauckler-Strickler.

Ricordiamo ancora una volta che tutte queste formule sono state ricavate per l'acqua, per cui non è lecito applicarle ad altri fluidi. Tuttavia, per la succitata indipendenza dal numero di Reynolds per elevati valori dello stesso, le formule sono applicabili anche agli altri fluidi newtoniani in regime di moto assolutamente turbolento.

Lista dei simboli

In parentesi quadre sono riportate le dimensioni, mentre i vettori sono indicati in grassetto.
L = lunghezza; T = tempo; M = massa.

x, y [L] – coordinate spaziali,
 t [T] – tempo,
 σ [L²] - sezione idrica,
 H [L] – carico idraulico,
 J [-] – cadente idraulica,
 Q [L³T⁻¹] – portata,
 d [L] – diametro di una condotta circolare,
 \mathbf{G} [MLT⁻²] – forza di massa,
 \mathbf{II} [MLT⁻²] – forza di superficie,
 \mathbf{M} [MLT⁻²] – flusso di quantità di moto,
 \mathbf{T} [MLT⁻²] – forza di superficie agente su una superficie cilindrica coassiale alla tubazione,
 γ [MT⁻²L⁻²] - peso specifico,
 ρ [ML⁻³] - densità,
 μ [ML⁻²T⁻²] – viscosità,
 g [LT⁻²] – accelerazione di gravità,
 \mathbf{u} [LT⁻¹] – velocità locale,
 u [LT⁻¹] – componente della velocità locale nella direzione dell'asse della condotta,
 v [LT⁻¹] – componente della velocità locale nella direzione del raggio della condotta,
 V [LT⁻¹] – velocità media di portata,
 ΔT [T] – intervallo temporale,
 \bar{u} [LT⁻¹] - velocità media locale,
 \mathbf{u}' [LT⁻¹] – velocità di agitazione,
Re [-] – numero di Reynolds,
 λ [-] - indice di resistenza,
 ε [L] – scabrezza equivalente in sabbia,
 χ [L] - perimetro bagnato,
 R [L] – raggio idraulico,
 C [L^{1/2}T⁻¹] – coefficiente di resistenza di Chezy,
 γ' [L^{1/2}] – indice di scabrezza di Bazin,
 m' [L^{1/2}] – indice di scabrezza di Kutter
 c [L^{1/3}T⁻¹] – coefficiente di resistenza di Strickler,
 α, n, m – coefficienti di una formula monomia (dimensioni di α dipendenti da m e n).

Bibliografia

- [1.]Citrini, D. e Nosedà, G. (1987) *Idraulica*. Ambrosiana, Milano.
- [2.]Hager, W. (1999) *Wastewater Hydraulics*. Springer, Berlin.
- [3.]Kay, M. (1998) *Practical Hydraulics*. E & FN SPON, London.
- [4.]Marchi, E. e Rubatta, A. (1978) *Meccanica dei Fluidi. Principi e Applicazioni Idrauliche*. UTET, Torino.
- [5.]Montuori, C. (1997) *Complementi di Idraulica*. Liguori, Napoli.
- [6.]Prabhata K. Swamee & Akalank K. Jain (1976) “Explicit Equations for Pipe-Flow Problems.” *Journal of the Hydraulics Division - ASCE*, Vol. 102, No. 5, May 1976, pp. 657-664.
- [7.]Viparelli, M. (1975) *Lezioni di Idraulica*. Liguori, Napoli.