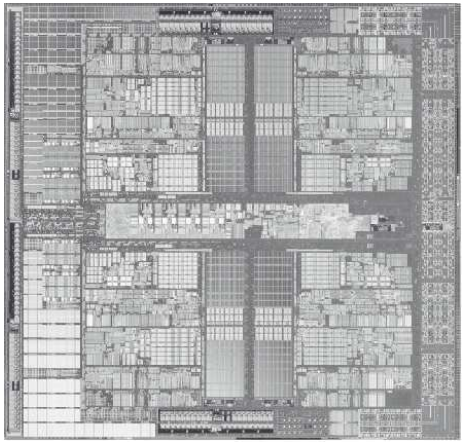
Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale



Corso di Calcolatori Elettronici

Rappresentazione dei dati numerici
Aritmetica dei registri

Anno Accademico 2011/2012

Francesco Tortorella

BIG IDEA: Bits can represent anything!!

- Caratteri
  - 26 lettere $\Rightarrow$ 5 bits ($2^5 = 32$)
  - Minuscole/maiuscole + punteggiatura
    $\Rightarrow$ 7 bits (in 8) ("ASCII")
  - Codice standard per rappresentare tutti I linguaggi del mondo
    $\Rightarrow$ 8,16,32 bits ("Unicode")
    `www.unicode.com`
- Valori logici
  - 0 $\Rightarrow$ False, 1 $\Rightarrow$ True
- Colori
  - 3 valori di intensità per i tre colori fondamentali RGB (3 x 8 bit = 24 bit)
- Locazioni / indirizzi comandi
- **Ricorda**: N bits $\Rightarrow$ al più 2^N oggetti

Come rappresentiamo i numeri ?

- Base di numerazione: dieci
  - **Cifre: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**
- Rappresentazione posizionale
  - **possibile per la presenza dello zero**

Esempio:

3201 =

$(3x10^3) + (2x10^2) + (0x10^1) + (1x10^0)$

In generale …

- Rappresentazione in base B → B-1 cifre
  - 0 1 2 … B-1

- Rappresentazione dei numeri:
  - $d_{31}d_{30}$ ... $d_2d_1d_0$ è un numero a 32 cifre
  - valore =
    $d_{31} \times B^{31} + d_{30} \times B^{30} + \ldots + d_2 \times B^2 + d_1 \times B^1 + d_0 \times B^0$

Quale base usare ?

- Decimale
  - naturale per gli esseri umani.
- Esadecimale
  - utile (agli esseri umani) per esaminare lunghe stringhe di bit
- Binaria
  - rappresentazione ottimale per il calcolatore

… perché non usare una codifica binaria della rappresentazione in base 10 ?

Conversione base 10 → base 2 (interi)

Come ottenere la rappresentazione in base 2 di un numero intero T rappresentato in base 10 ?

Supponiamo:

$$\mathbf{T=c_{n-1}x2^{n-1} + c_{n-2}x2^{n-2} + \ldots + c_2x2^2 + c_1x2^1 + c_0x2^0}$$

$$\mathbf{c_i \in \{0,1\}}$$

Non conosciamo:

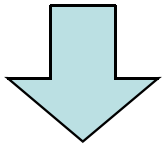
- le cifre c_i
- il numero di cifre n

Conversione base 10 → base 2 (interi)

$$T=c_{n-1}x2^{n-1} + c_{n-2}x2^{n-2} + \ldots + c_2x2^2 + c_1x2^1 + c_0x2^0 =$$

$$(c_{n-1}x2^{n-2} + c_{n-2}x2^{n-3} + \ldots + c_2x2^1 + c_1)\,x2 + c_0 =$$

$$Q_0x2 + c_0$$



$$Q_0 = T \text{ div } 2 \qquad c_0 = T \bmod 2$$

$$Q_0 = (c_{n-1}x2^{n-3} + c_{n-2}x2^{n-4} + \ldots + c_2)x2 + c_1 = Q_1x2 + c_1$$

$$Q_1 = Q_0 \text{ div } 2 \qquad c_1 = Q_0 \bmod 2$$

Conversione base 10 → base 2 (interi)

```
void convint(int T,int c[],int &n)
{
  int Q;
  n=0;Q=T;
  do {
   c[n]=Q%2;
   Q=Q/2;
   n++;
  } while (Q!=0);
}
```

La conversione genera le cifre a partire da quella meno significativa

Esempio:

$75_{10} \rightarrow \mathbf{?}_{2}$

Aritmetica in base 2

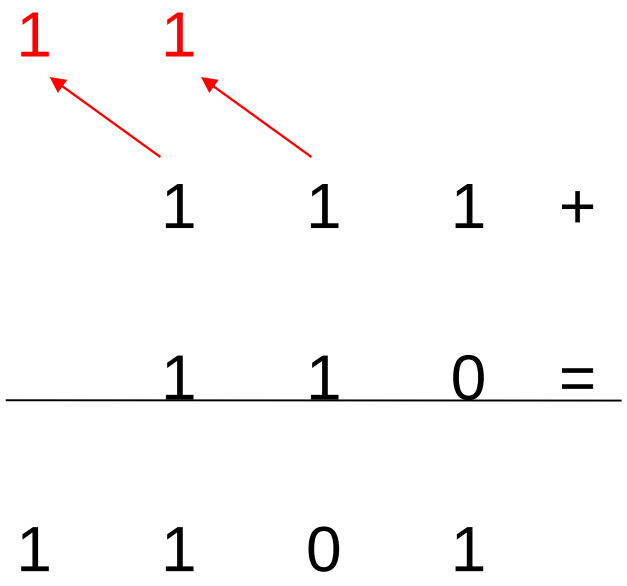
Le operazioni aritmetiche si svolgono in maniera analoga a quanto si fa in base 10.

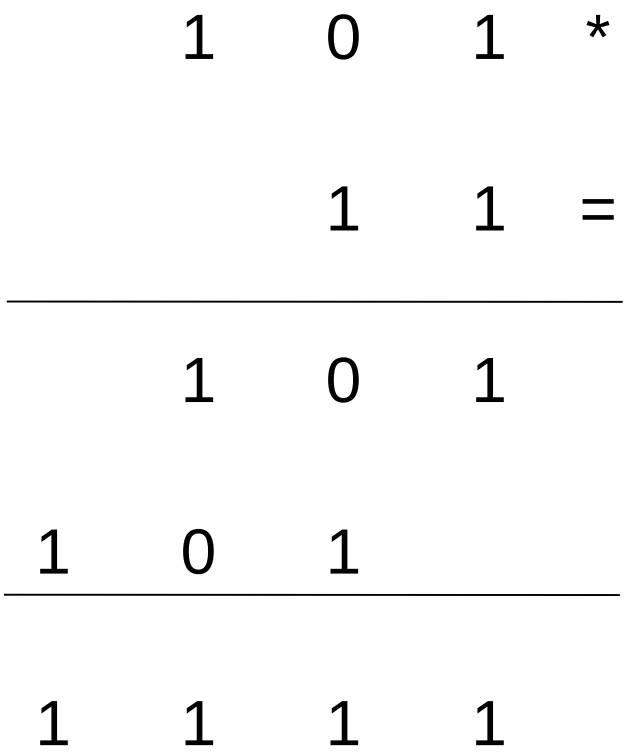
+	0	1
0	0	1
1	1	10

*	0	1
0	0	0
1	0	1

"tavola pitagorica" in base 2

Aritmetica in base 2





Aritmetica dei registri

- I registri di memoria sono supporti di lunghezza finita
- Ciò impone delle restrizioni all'insieme di numeri rappresentabili e, di conseguenza, dei vincoli all'aritmetica
- Registro a N bit → 2^N valori diversi rappresentabili
  - Es.: 8 bit → 256 valori
    possibile rappresentare l'intervallo [0,255]

Aritmetica dei registri

Non ci sono problemi nel caso in cui l'operazione produce un risultato rappresentabile nel registro

0	1	1	0	1	1	0	1	+	1	0	9	+
1	0	0	0	1	0	0	1	=	1	3	7	=
1	1	1	1	0	1	1	0		2	4	6	

Aritmetica dei registri

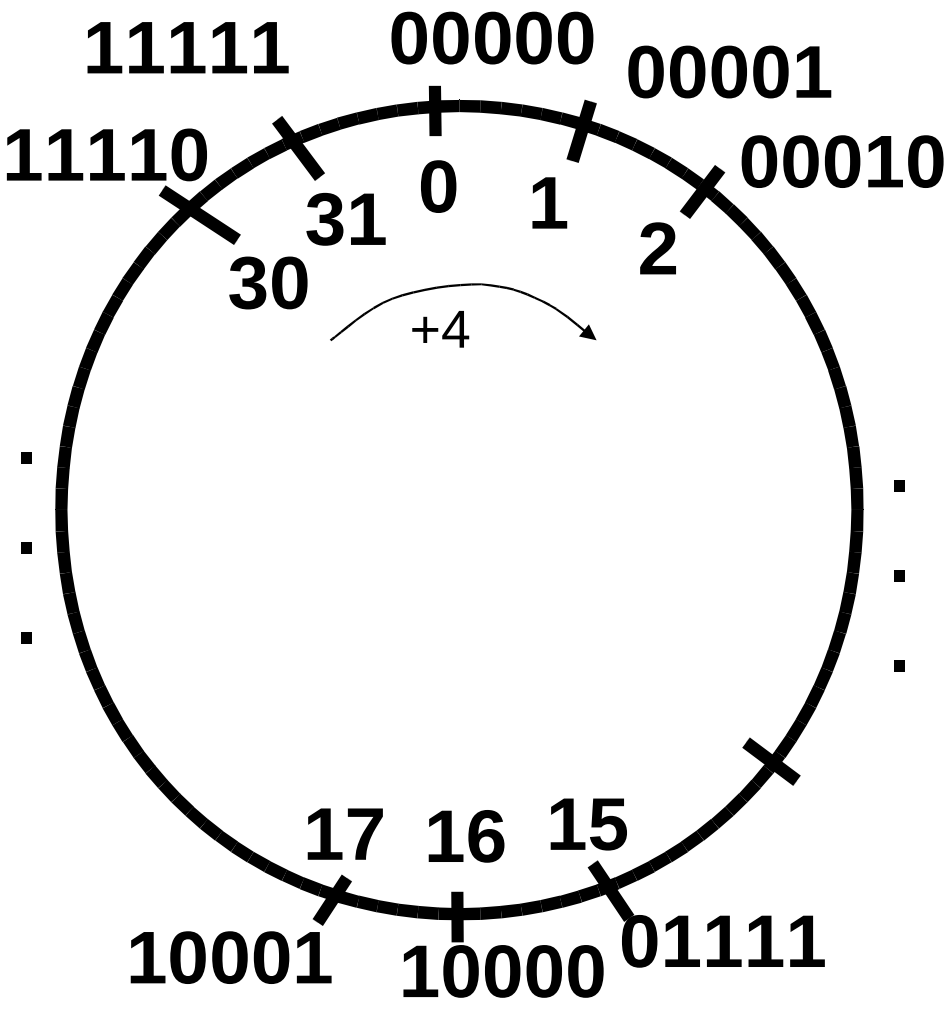
Se l'operazione fornisce un risultato R non rappresentabile, si produce un riporto uscente dal registro, mentre all'interno rimane una parte della rappresentazione del risultato (R mod 2^N)

	1	1	1	0	1	1	0	1	+		2	3	7	+
	1	0	0	0	1	0	0	1	=		1	3	7	=
1	0	1	1	1	0	1	1	0			3	7	4	
											1	1	8	

Aritmetica dei registri

- L'aritmetica dei registri a N bit è caratterizzata da una congruenza mod 2^N

- Quindi, per N=5:
  - 30+4=2 !



Aritmetica dei registri

- Il riporto uscente dal registro, generato da un'addizione tra numeri interi, si definisce *carry*
- Il prestito uscente dal registro, generato da una sottrazione tra numeri interi, si definisce *borrow*

4	00100	10	01010	
+ 2	+ 00010	+ 26	11010	
6	0|00110	4	1|00100	carry

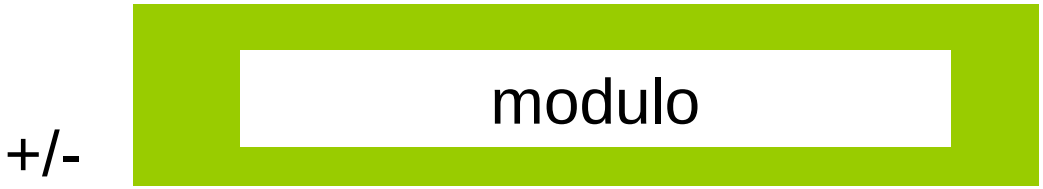
4	00100	10	01010	
- 2	- 00010	- 26	11010	
2	0|00010	16	1|10000	borrow

Rappresentazione dei numeri relativi

- Rappresentazione in segno e modulo
- Rappresentazione in complementi alla base
- Rappresentazione per eccessi

Rappresentazione dei numeri negativi

- Soluzione più immediata: segno + modulo



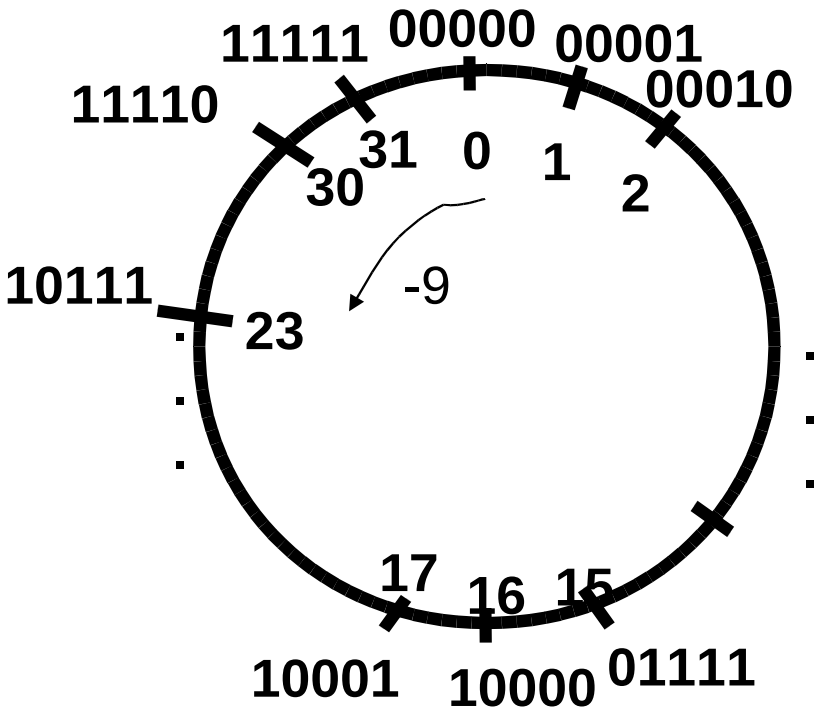
Possibile convenzione:

0 → + 1 → -

- Problemi
  - dove mettere il segno ?
  - doppia rappresentazione per lo zero (+0, -0)
  - operazioni alquanto complicate

Rappresentazione dei numeri negativi

- Soluzione alternativa
  - Che cosa succede in un registro a N bit quando si sottrae un numero da 0 ?



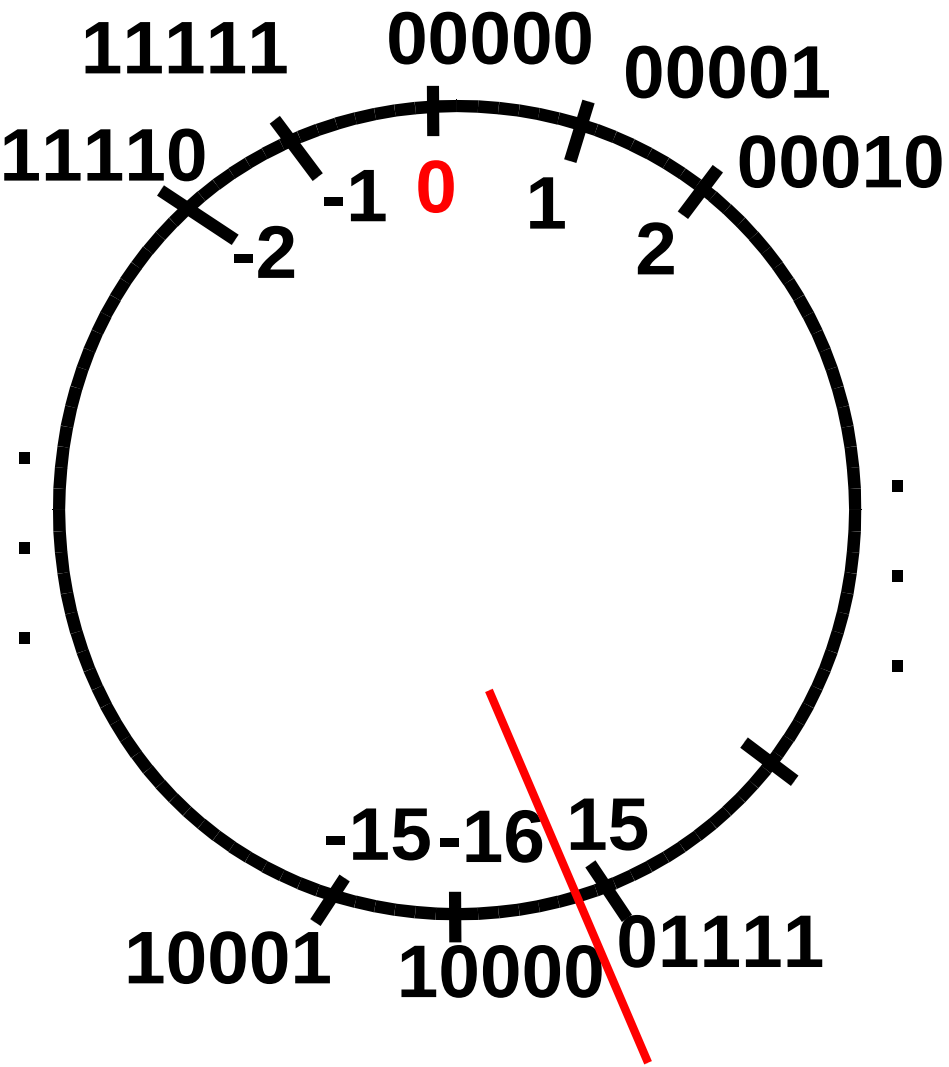
0 0 0 0 0 -

0 1 0 0 1 =

---

1 1 0 1 1 1

Complementi alla base



Caratteristiche:

- 2^{N-1} non-negativi
- 2^{N-1} negativi
- uno zero
- quanti positivi ?
- confronto ?
- rappr. dello zero

Complementi alla base

- L'intervallo di numeri rappresentati è $[-2^{N-1} \; +2^{N-1}-1]$
- La rappresentazione di un numero x nell'intervallo è data da $R(x)=(x+2^N) \bmod 2^N$
- Il bit più significativo è indicativo del segno ("bit di segno")

00000	0
00001	+1
00010	+2
00011	+3
.	.
.	.
01110	+14
01111	+15
10000	-16
10001	-15
10010	-14
.	.
.	.
11101	-3
11110	-2
11111	-1

Calcolo rapido del complemento alla base

- Per ottenere rapidamente la rappresentazione in complemento alla base di un numero negativo su N bit
  - si estrae la rappresentazione del valore assoluto del numero su N bit
  - si complementano le cifre ad una ad una
  - si aggiunge 1
- Es.: complemento alla base su 8 bit di -33

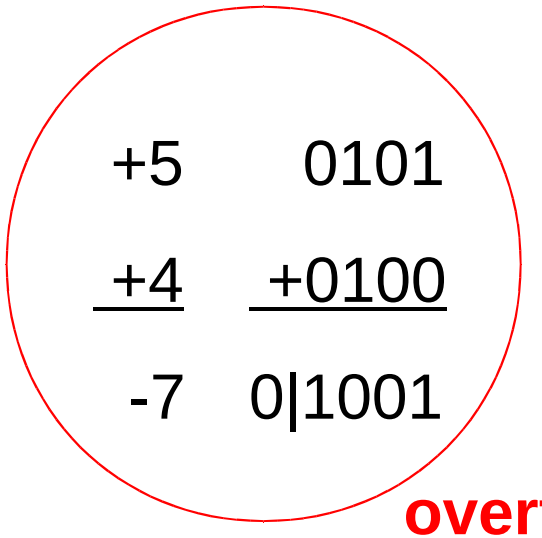
  33_{10} =00100001 11011110+1=11011111

Operazioni in complemento alla base

- Le addizioni si realizzano direttamente sulle rappresentazioni in quanto R(x+y)=R(x)+R(y)
- Anche le sottrazioni si valutano tramite addizioni, ponendo x-y come x+(-y); di conseguenza R(x-y)=R(x)+R(-y)
- Nel caso in cui l'operazione produce un numero al di fuori dell'intervallo di rappresentazione si ha un *overflow*

Operazioni in complemento alla base

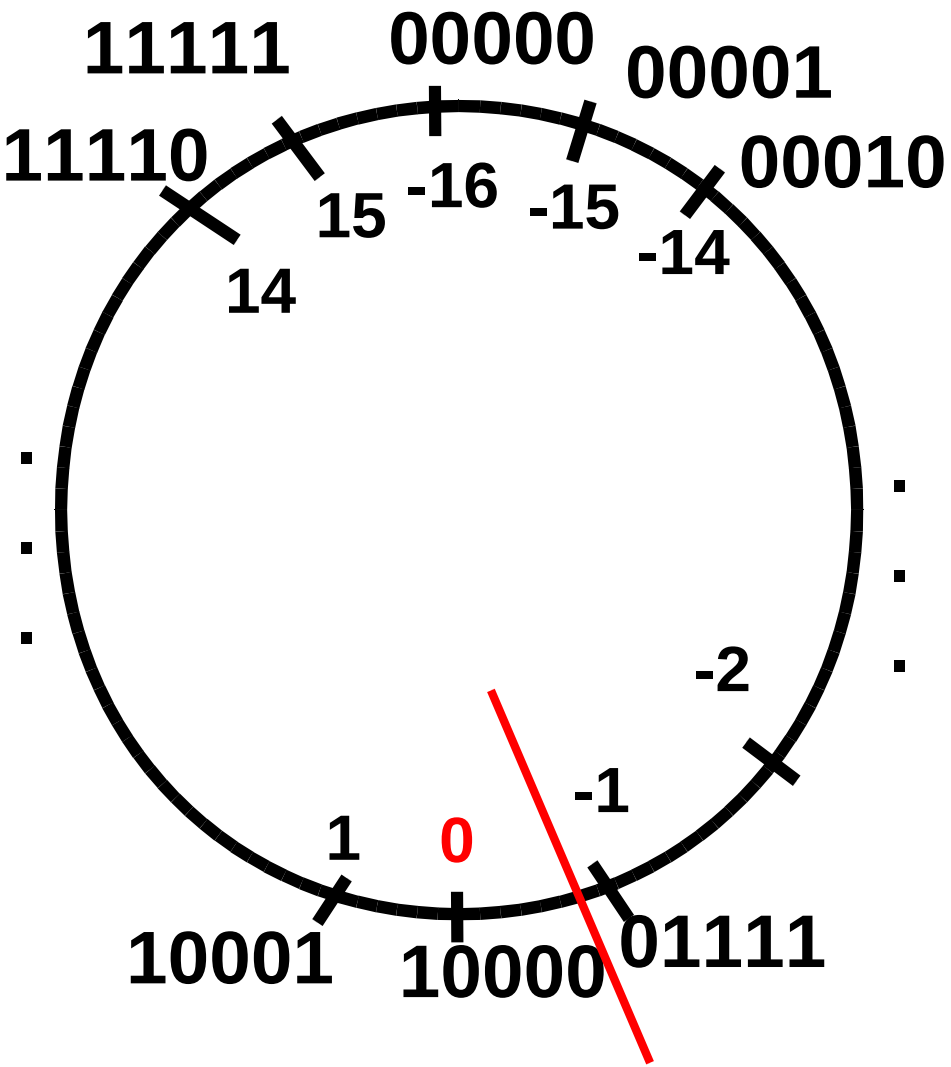
+4	0100		+4	0100	
+2	+ 0010		-2	+1110	
+6	0|0110		+2	1|0010	
-4	1100		+5	0101	
-2	+ 1110		+4	+0100	
-6	1|1010		-7	0|1001	



-6	1010		
-3	+1101		
+7	1|0111		

overflow

Rappresentazione per eccessi (polarizzata)



Caratteristiche:

- 2^{N-1} non-negativi
- 2^{N-1} negativi
- uno zero
- quanti positivi ?
- confronto ?
- rappr. dello zero

Eccessi

- L'intervallo di numeri rappresentati è $[-2^{N-1} \; +2^{N-1}-1]$
- La rappresentazione di un numero x nell'intervallo è data da $R(x)=x+2^{N-1}$
- Il bit più significativo è indicativo del segno ("bit di segno")

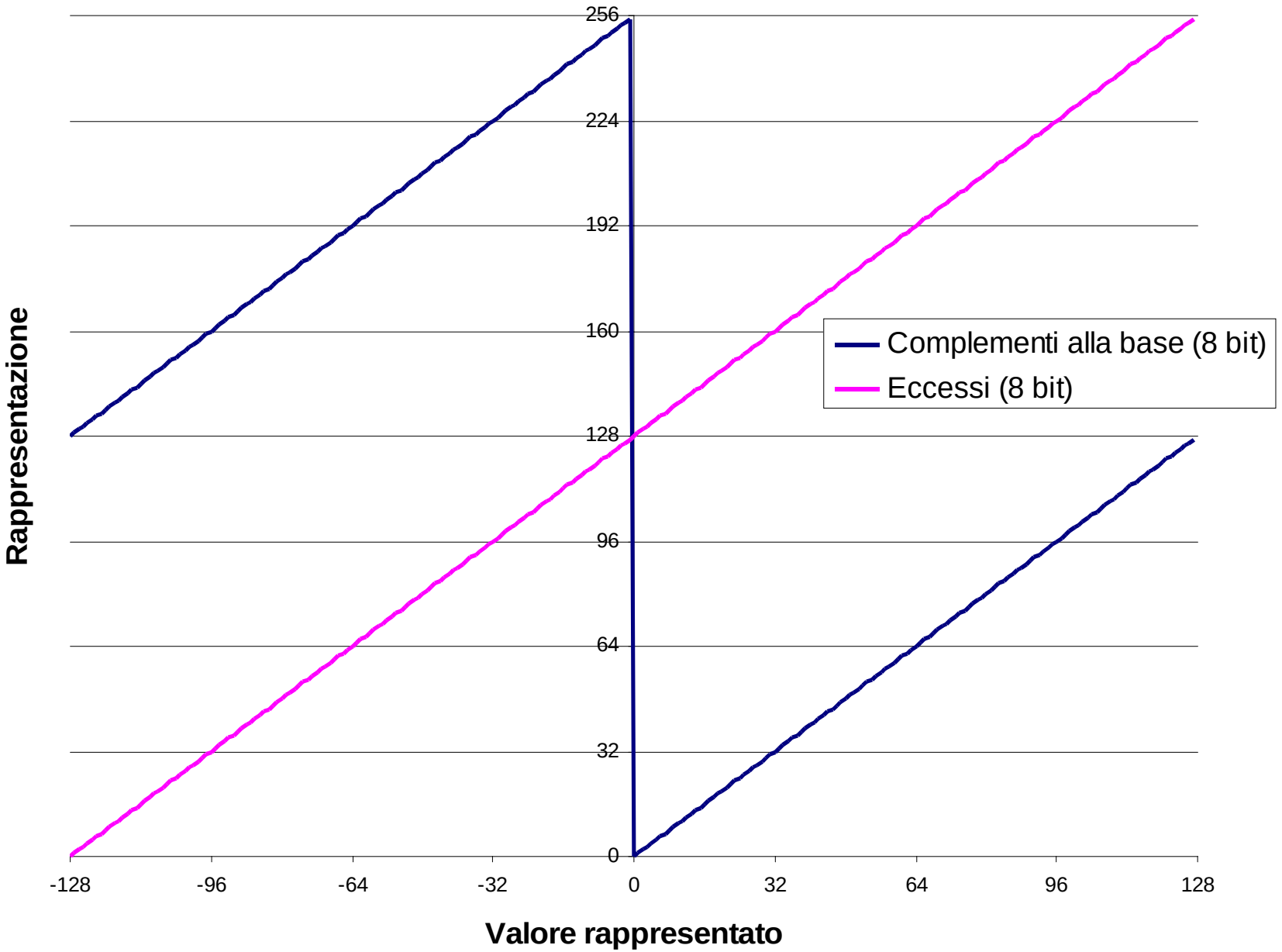
00000	-16
00001	-15
00010	-14
00011	-13
.	.
.	.
01110	-2
01111	-1
10000	0
10001	+1
10010	+2
.	.
.	.
11101	+13
11110	+14
11111	+15

Operazioni in eccessi

- Le addizioni si realizzano direttamente sulle rappresentazioni in quanto R(x+y)=R(x)+R(y)
- Anche le sottrazioni si valutano tramite addizioni, ponendo x-y come x+(-y); di conseguenza R(x-y)=R(x)+R(-y)
- Achtung! Siccome $R(x)+R(y)=x+y+2^{N-1}+2^{N-1}$, il risultato necessita di una correzione
- Nel caso in cui l'operazione produce un numero al di fuori dell'intervallo di rappresentazione si ha un *overflow*

Confronto tra complementi alla base ed eccessi

- Entrambe permettono di realizzare una sottrazione tramite addizione (macchine aritmetiche più semplici)
- Le operazioni in eccessi richiedono un aggiustamento finale
- La rappresentazione in complementi rende più difficile il confronto


Rappresentazione
256
224
192
160
128
96
64
32
0
-128
-96
-64
-32
0
32
64
96
128
Valore rappresentato
Complementi alla base (8 bit)
Eccessi (8 bit)

Numeri signed e unsigned

- Un registro di N bit può rappresentare:
  - Numeri assoluti nel range **[0, 2^N-1]** → numeri ***unsigned***
  - Numeri relativi nel range **[-2^{N-1}, 2^{N-1}-1]** → numeri ***signed***

  } **C**

- Dalla stringa di bit nel registro non si può risalire al tipo di numero memorizzato. Quali sono le conseguenze ?
  - Operazioni aritmetiche indipendenti dalla rappresentazione
    → nessuna conseguenza
  - Confronto dipendente dalla rappresentazione
    → due tipi di confonto

- X = 10001 Y = 01110

  X > Y ?
  - unsigned: SI (17>14)
  - signed: NO (-15<+14)