Rappresentazione dei dati

F. Tortorella

Corso di Elementi di Informatica
2007/2008

Università degli Studi di Cassino

Rappresentazione dei dati

Rappresentazione in base 2 e base 16
Aritmetica dei registri

F. Tortorella

Corso di Elementi di Informatica
2007/2008

Università degli Studi di Cassino

Come rappresentiamo i numeri ?

- Base di numerazione: dieci
  - **Cifre: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**
- Rappresentazione posizionale
  - **possibile per la presenza dello zero**

Esempio:

3201 =

$(3x10^3) + (2x10^2) + (0x10^1) + (1x10^0)$

In generale ...

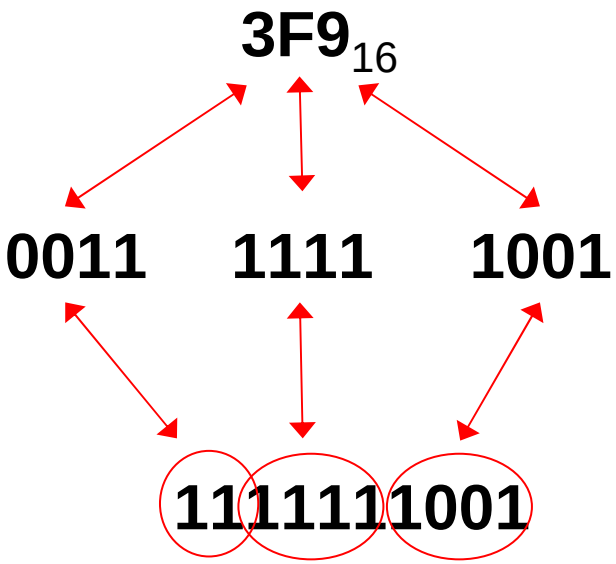
- Rappresentazione in base B → B-1 cifre
  - 0 1 2 … B-1

- Rappresentazione dei numeri:
  - $d_{31}d_{30} \ldots d_2d_1d_0$ è un numero a 32 cifre
  - valore =
    $d_{31} \times B^{31} + d_{30} \times B^{30} + \ldots + d_2 \times B^2 + d_1 \times B^1 + d_0 \times B^0$

Altre basi

- B=2 :
  - cifre: 0 1
  - 1011010 →
    $1x2^6 + 0x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2 + 0x1 =$
    $64 + 16 + 8 + 2 = 90$
    7 cifre binarie → 2 cifre decimali
- B=16 :
  - cifre: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F
  - 524 →
    $5x16^2 + 2x16 + 4x1 = 1316$
    3 cifre esadecimali → 4 cifre decimali

Siccome $16=2^4$, il passaggio tra le rappresentazioni in base 2 e in base 16 è molto semplice:



base		
10	16	2
00	0	0000
01	1	0001
02	2	0010
03	3	0011
04	4	0100
05	5	0101
06	6	0110
07	7	0111
08	8	1000
09	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

Quale base usare ?

- Decimale
  - naturale per gli esseri umani.
- Esadecimale
  - utile (agli esseri umani) per esaminare lunghe stringhe di bit
- Binaria
  - rappresentazione ottimale per il calcolatore

Conversione base 10 → base 2 (interi)

Come ottenere la rappresentazione in base 2 di un numero intero T rappresentato in base 10 ?

Supponiamo:

$$T=c_{n-1}x2^{n-1} + c_{n-2}x2^{n-2} + \ldots + c_2x2^2 + c_1x2^1 + c_0x2^0$$

$$c_i \in \{0,1\}$$

Non conosciamo:

- le cifre c_i
- il numero di cifre n

Conversione base 10 → base 2 (interi)

$$T=c_{n-1}x2^{n-1} + c_{n-2}x2^{n-2} + \ldots + c_2x2^2 + c_1x2^1 + c_0x2^0 =$$
$$(c_{n-1}x2^{n-2} + c_{n-2}x2^{n-3} + \ldots + c_2x2^1 + c_1)\ x2 + c_0 =$$
$$Q_0x2 + c_0$$

$$Q_0 = T \text{ div } 2 \qquad c_0 = T \bmod 2$$

$$Q_0 = (c_{n-1}x2^{n-3} + c_{n-2}x2^{n-4} + \ldots + c_2)x2 + c_1 = Q_1x2 + c_1$$

$$Q_1 = Q_0 \text{ div } 2 \qquad c_1 = Q_0 \bmod 2$$

Aritmetica dei registri

- I registri di memoria sono supporti di lunghezza finita
- Ciò impone delle restrizioni all'insieme di numeri rappresentabili e, di conseguenza, dei vincoli all'aritmetica
- Registro a N bit → 2^N valori diversi rappresentabili
  - Es.: 8 bit → 256 valori
    possibile rappresentare l'intervallo [0,255]

Aritmetica dei registri

Non ci sono problemi nel caso in cui l'operazione produce un risultato rappresentabile nel registro

0	1	1	0	1	1	0	1	+	1 0 9 +
1	0	0	0	1	0	0	1	=	1 3 7 =
1	1	1	1	0	1	1	0		2 4 6

Aritmetica dei registri

Se l'operazione fornisce un risultato R non rappresentabile, si produce un riporto uscente dal registro, mentre all'interno rimane una parte della rappresentazione del risultato (R mod 2^N)

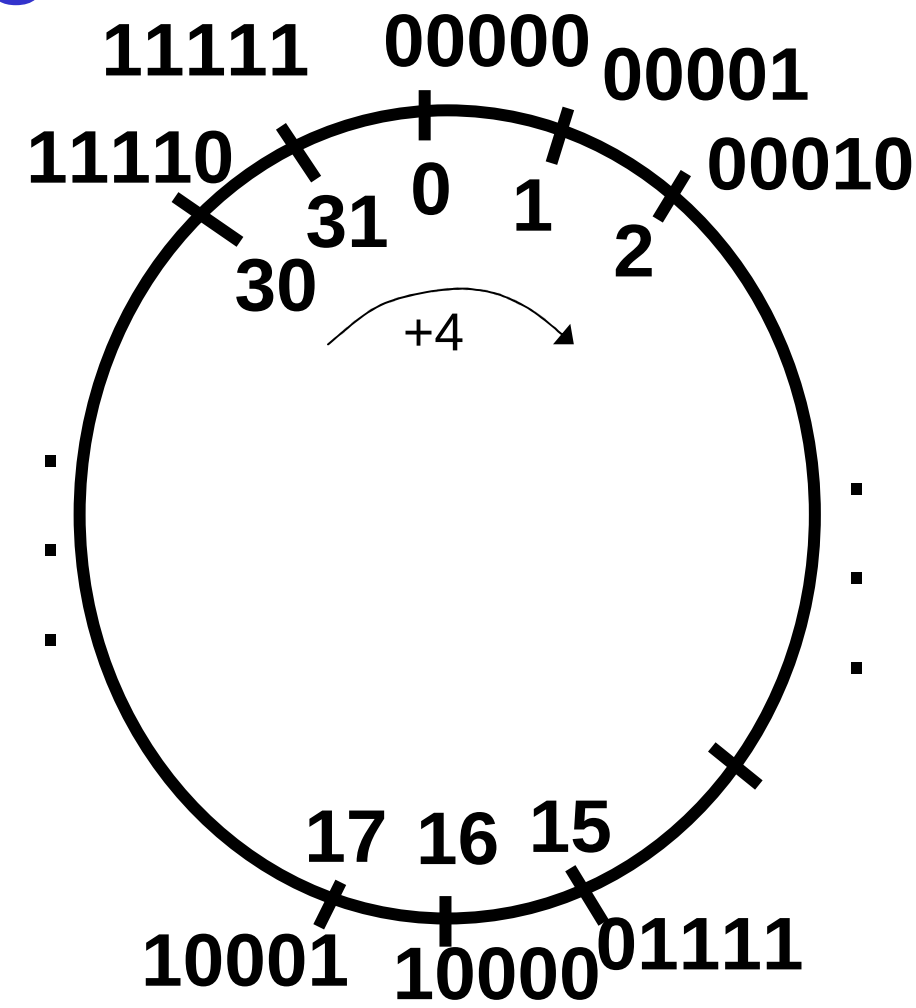
	1	1	1	0	1	1	0	1	+
	1	0	0	0	1	0	0	1	=
1	0	1	1	1	0	1	1	0	

2	3	7	+
1	3	7	=
3	7	4	
1	1	8	

Aritmetica dei registri

- L'aritmetica dei registri a N bit è caratterizzata da una congruenza mod 2^N

- Quindi:
  - 30+4=2 !



Aritmetica dei registri

- Il riporto uscente dal registro, generato da un'addizione tra numeri interi, si definisce *carry*
- Il prestito uscente dal registro, generato da una sottrazione tra numeri interi, si definisce *borrow*

	4		**00100**		**10**	**01010**	
+	**2**	**+**	**00010**	**+**	**26**	**11010**	
	6		**0|00110**		**4**	**1|00100**	**carry**

	4		**00100**		**10**	**01010**	
-	**2**	**-**	**00010**	**-**	**26**	**11010**	
	2		**0|00010**		**16**	**1|10000**	**borrow**

Rappresentazione dei dati

Rappresentazione in segno e modulo
Rappresentazione in complementi alla base

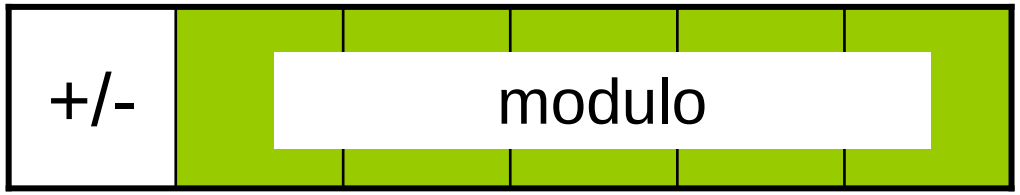
F. Tortorella

Corso di Elementi di Informatica
2007/2008

Università degli Studi di Cassino

Rappresentazione dei numeri negativi

- Soluzione più immediata: segno + modulo



Possibile convenzione:

0 → + 1 → -

- Problemi
  - dove mettere il segno ?
  - doppia rappresentazione per lo zero (+0, -0)
  - operazioni alquanto complicate

Rappr. segno e modulo

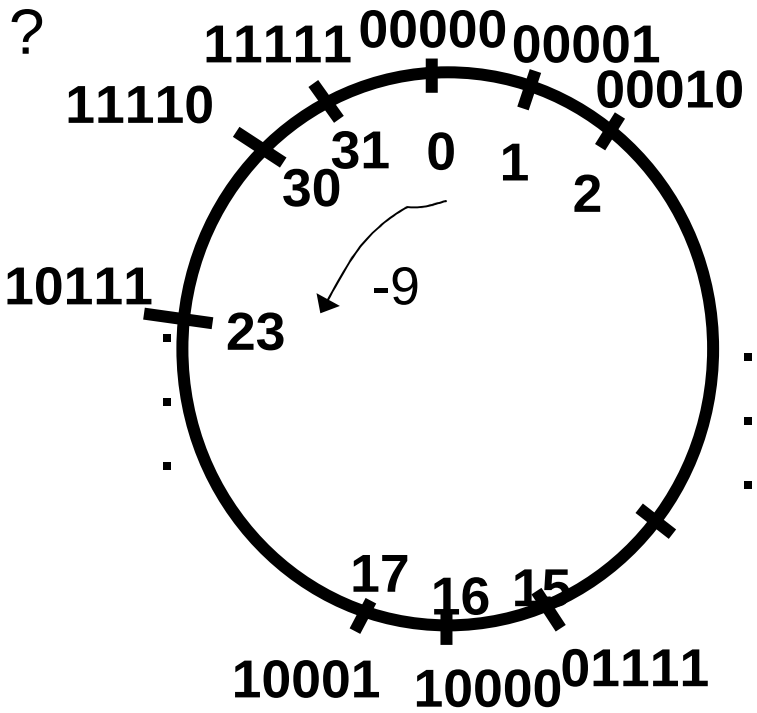
- L'intervallo di numeri rappresentati è $[-2^{N-1} \quad +2^{N-1}]$
- Lo zero è rappresentato due volte

00000	0
00001	+1
00010	+2
00011	+3
.	.
.	.
01110	+14
01111	+15
10000	0
10001	-1
10010	-2
.	.
.	.
11101	-13
11110	-14
11111	-15

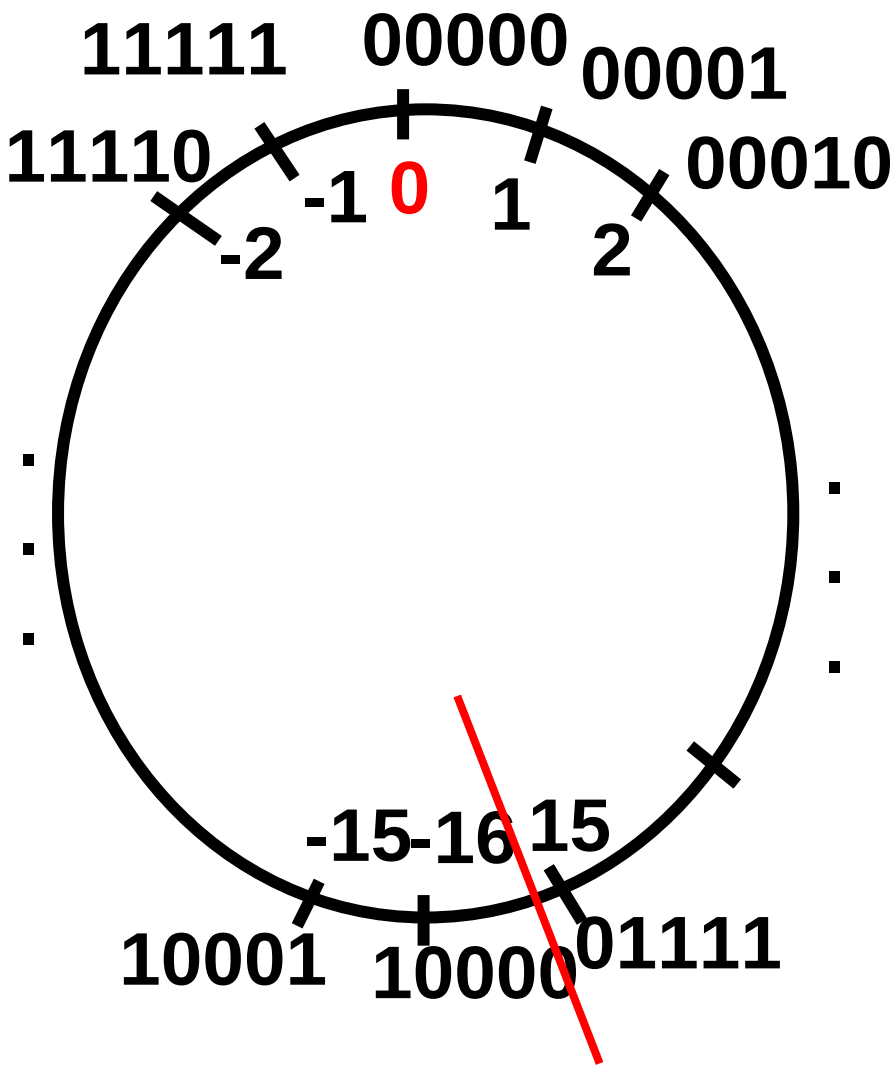
Rappresentazione dei numeri negativi

- Soluzione alternativa
  - Che cosa succede in un registro a N bit quando si sottrae un numero da 0 ?

	0	0	0	0	0	-
	0	1	0	0	1	=
1	1	0	1	1	1	



Complementi alla base



Caratteristiche:

- 2^{N-1} non-negativi
- 2^{N-1} negativi
- uno zero
- quanti positivi ?
- confronto ?
- rappr. dello zero

Complementi alla base

- L'intervallo di numeri rappresentati è $[-2^{N-1} \quad +2^{N-1}-1]$
- La rappresentazione di un numero x nell'intervallo è data da $R(x)=(x+2^N) \bmod 2^N$
- Il bit più significativo è indicativo del segno ("bit di segno")

00000	0
00001	+1
00010	+2
00011	+3
.	.
.	.
01110	+14
01111	+15
10000	-16
10001	-15
10010	-14
.	.
.	.
11101	-3
11110	-2
11111	-1

Operazioni in complemento alla base

- Le addizioni si realizzano direttamente sulle rappresentazioni in quanto R(x+y)=R(x)+R(y)
- Anche le sottrazioni si valutano tramite addizioni, ponendo x-y come x+(-y); di conseguenza R(x-y)=R(x)+R(-y)
- Nel caso in cui l'operazione produce un numero al di fuori dell'intervallo di rappresentazione si ha un *overflow*

Operazioni in complemento alla base

+4	0100
+2	+ 0010
+6	0|0110

+4	0100
-2	+1110
+2	1|0010

-4	1100
-2	+ 1110
-6	1|1010

+5	0101
+4	+0100
-7	0|1001

-6	1010
-3	+1101
+7	1|0111

overflow

Rappresentazione dei dati

Rappresentazione in virgola fissa

F. Tortorella

Corso di Elementi di Informatica
2007/2008

Università degli Studi di Cassino

Conversione base 10 → base 2 (frazionari)

Consideriamo un numero F minore di 1.

$$F = c_{-1}x2^{-1} + c_{-2}x2^{-2} + \ldots + c_{-n}x2^{-n} \qquad c_i \in \{0,1\}$$

$$Fx2 = c_{-1} + (c_{-2}x2^{-1} + \ldots + c_{-n}x2^{-(n-1)}) = c_{-1} + P_1$$

$$P_1 < 1$$

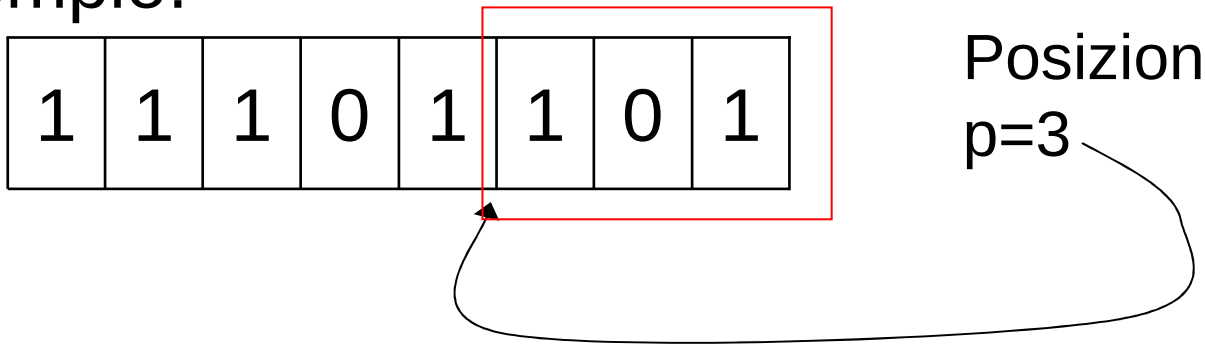
$$P_1x2 = c_{-2} + (c_{-3}x2^{-1} + \ldots + c_{-n}x2^{-(n-2)}) = c_{-2} + P_2$$

Rappresentazione dei numeri reali

- Come rappresentiamo 22.315 ?
- A differenza dei numeri interi, per rappresentare i numeri reali è necessario codificare la posizione del punto frazionario
- Due soluzioni:
  - Codifica esplicita
  - Codifica implicita
- Con la codifica esplicita dovremmo rappresentare sia il numero che il suo fattore di scala → antieconomico e complicato

Rappresentazione in virgola fissa

- Con la codifica implicita, si assume prefissata la posizione del punto all'interno del registro → Rappresentazione in virgola fissa (fixed point)
- Esempio:



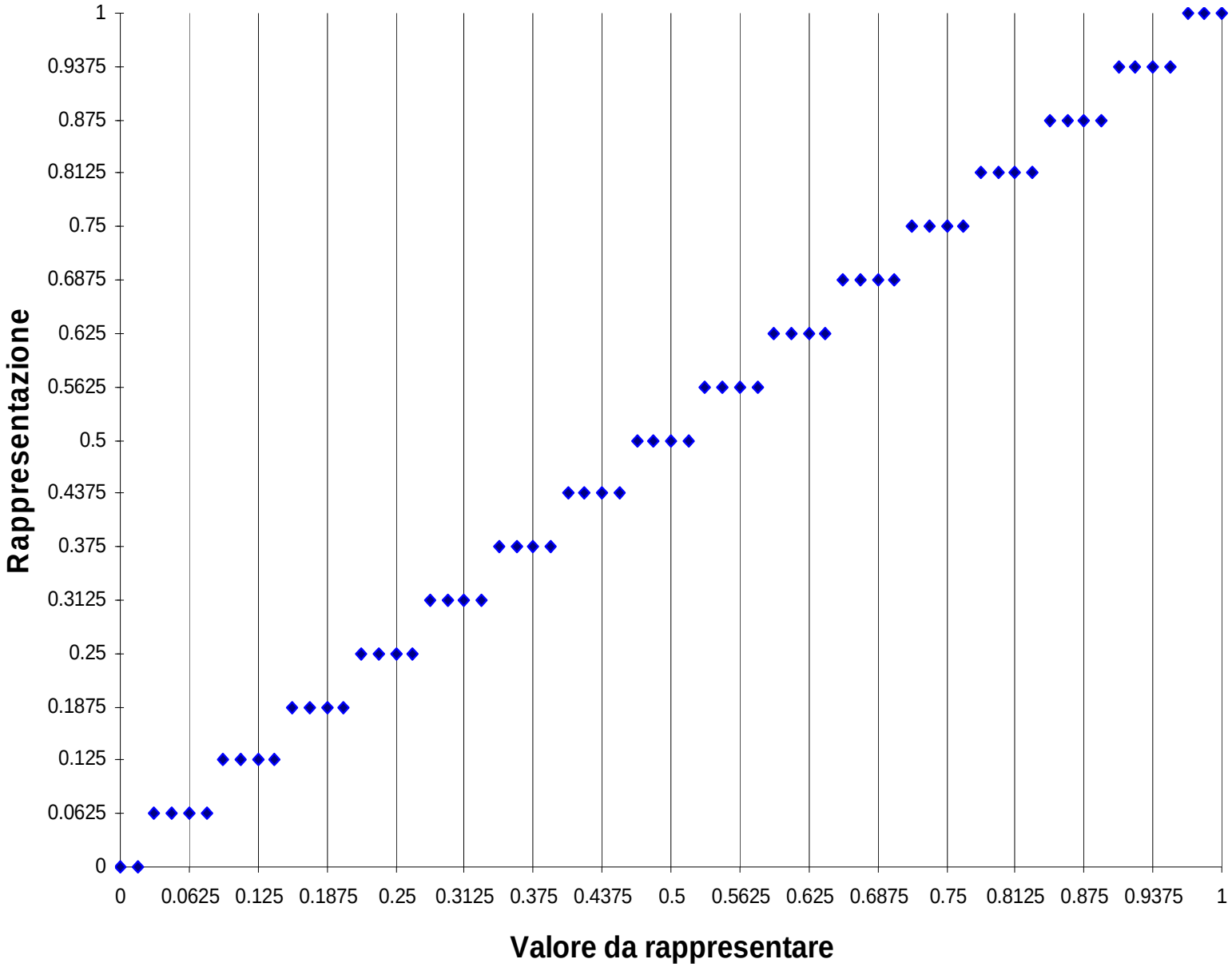
il numero rappresentato è 11101.101

Rappresentazione in virgola fissa

- Con questa convenzione, il valore X rappresentato nel registro è $K*2^{-p}$, dove K è il valore che otterremmo se interpretassimo come un intero il contenuto del registro.
- Qual è l'insieme dei valori rappresentabili su un registro a N bit ?

  K: $0,1,2,\ldots,2^N-1$ → X: $0, 2^{-p}, 2*2^{-p}, \ldots, (2^N-1)*2^{-p}$
- Esempio: N=8, p=4

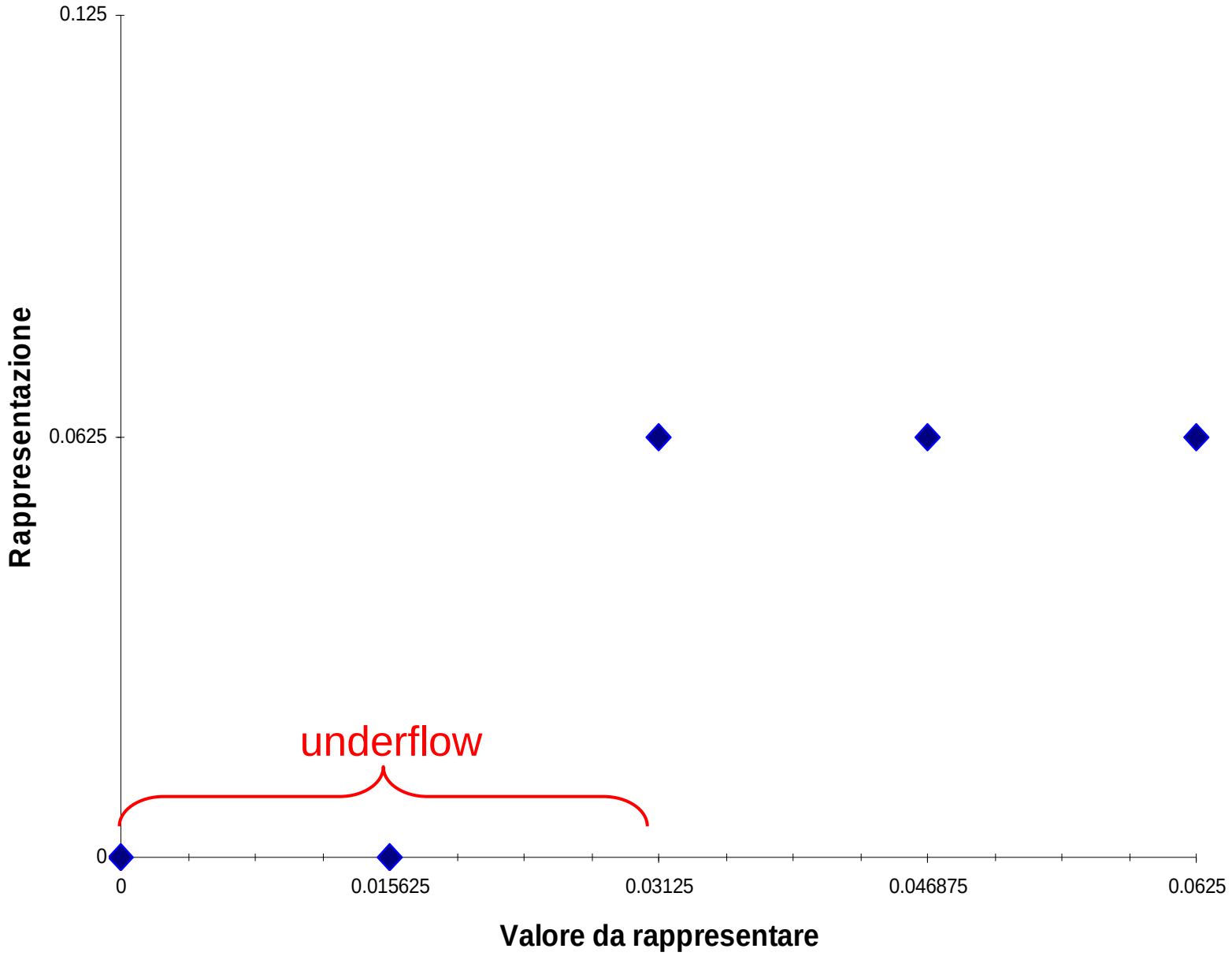
  X= 0, 0.0625, 0.125, 0.1875,…, 15.9375


Rappresentazione
1
0.9375
0.875
0.8125
0.75
0.6875
0.625
0.5625
0.5
0.4375
0.375
0.3125
0.25
0.1875
0.125
0.0625
0
0
0.0625
0.125
0.1875
0.25
0.3125
0.375
0.4375
0.5
0.5625
0.625
0.6875
0.75
0.8125
0.875
0.9375
1
Valore da rappresentare

Rappresentazione in virgola fissa

- I numeri sono rappresentati con una certa approssimazione
  - Esempio: tutti i valori compresi tra 0.03125 e 0.09375 sono rappresentati da 0.0625

- Tutti i valori compresi tra 0 e 0.03125 sono rappresentati da 0.0000 → *underflow*


0.125
0.0625
0
Rappresentazione
underflow
0
0.015625
0.03125
0.046875
0.0625
Valore da rappresentare

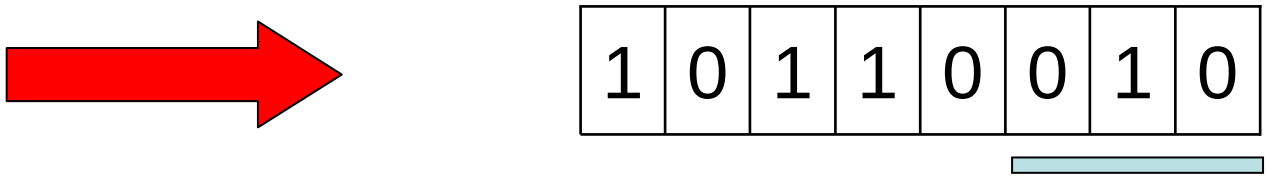
Rappresentazione di un numero in virgola fissa

Supponiamo di voler rappresentare il numero 22.315 in virgola fissa in un registro ad 8 bit con p=3.

Separiamo parte intera e parte frazionaria:

$22_{10} \rightarrow 10110_2$

$0.315_{10} \rightarrow 0.010100\ldots_2$



Precisione della virgola fissa

- Quantifichiamo l'errore assoluto:

  $Err_{max} = 2^{-p}/2$ → per p=4 $Err_{max} = 0.03125$

- Come fare per diminuire l'errore ?

  basta aumentare p, ma qual è l'effetto sul range dei numeri rappresentabili ?

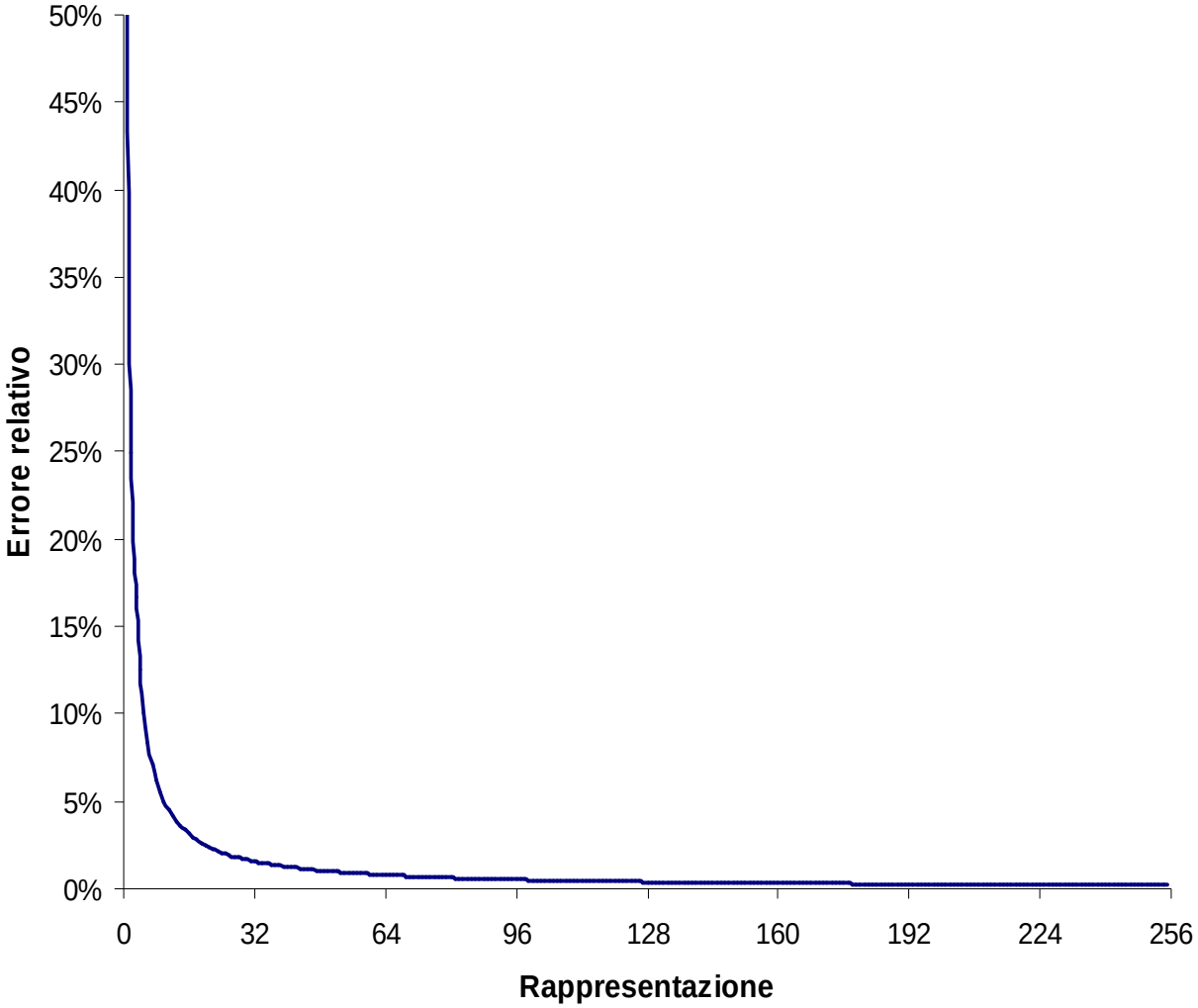
  → compromesso tra range e precisione

- Ricordiamo che X: $0, 2^{-p}, 2*2^{-p}, \ldots, (2^N-1)*2^{-p}$

Precisione della virgola fissa

Il problema vero è legato all'errore relativo:

$E_{rel}=Err_{max}/x$



Alternative ?

Rappresentazione dei dati

Rappresentazione in virgola mobile

F. Tortorella

Corso di Elementi di Informatica
2007/2008

Università degli Studi di Cassino

Rappresentazione in virgola mobile

- Fissata la base B, il valore viene considerato nella forma $M*B^E$ (notazione scientifica) ed è rappresentato tramite la coppia (M,E)

  Esempio: $22.315=0.22315*10^2 \rightarrow (0.22315,2)$

  $10110.010=10.110010*2^3 \rightarrow (10.110010,11)$

- Nel registro saranno quindi prefissate zone diverse per la mantissa e per l'esponente

Rappresentazione in virgola mobile

Come si rappresentano M ed E ?

- M
  - numero reale
  - segno e modulo
  - virgola fissa
- E
  - numero intero con segno
  - eccessi
- La disposizione nel registro facilita il confronto

+/-	**E**	**M**

Intervallo di numeri rappresentabili

- M rappresentato su m bit con p cifra frazionarie
  M: $0, 2^{-p}, 2*2^{-p}, \ldots, (2^{m}-1)*2^{-p}$

- E rappresentato su e bit
  E: $-2^{e-1},\ldots,+2^{e-1}-1$

- $N_{min}=M_{min}*2^{Emin} = 2^{-p}*2^{-2^{e-1}}$

- $N_{max}=M_{max}*2^{Emax} = (2^{m}-1)* 2^{-p}*2^{+2^{e-1}-1}$

Intervallo di numeri rappresentabili

- Esempio:
  - m=23 p=23
  - e=8
- $N_{min} = 2^{-23} * 2^{-128} \cong 3.5 * 10^{-46}$
- $N_{max} = (2^{23}-1) * 2^{-23} * 2^{127} \cong 1.7 * 10^{+38}$

Rappresentazione normalizzata

- Con la virgola mobile non c'è unicità di rappresentazione:
  $N = M*2^E = (M*2)*2^{E-1} = (M*4)*2^{E-2} = (M/2)*2^{E+1}$

- Quale scegliere ? Quella che massimizza la precisione:
  prima cifra della mantissa diversa da 0
  → *rappresentazione normalizzata*

Rappresentazione normalizzata

- Esempio: N = 0.0003241892
  mantissa a 5 cifre decimali
- Diverse rappresentazioni possibili:

  $0.00032*10^{0}$

  $0.00324*10^{-1}$

  $0.03241*10^{-2}$

  $0.32418*10^{-3}$ ← normalizzata

Rappresentazione normalizzata

- L'intervallo di rappresentazione si modifica :
  $N_{min} = 2^{m-1} * 2^{-p} * 2^{-2^{e-1}}$

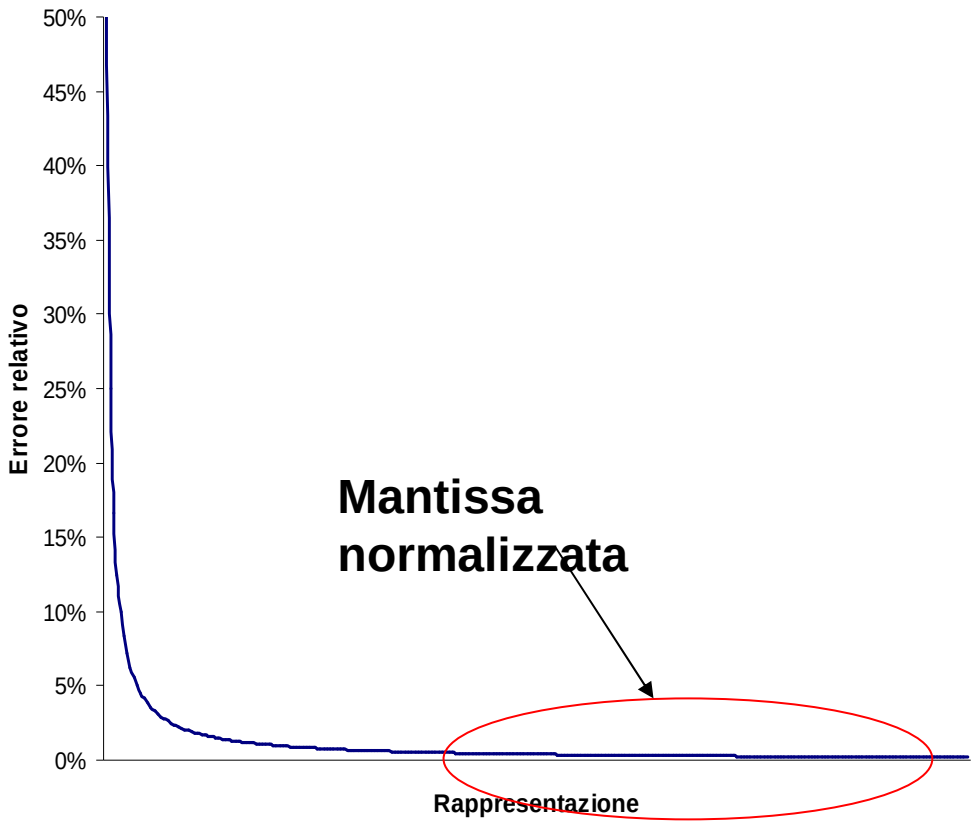
- Esempio:
  - m=23 p=23
  - e=8

- $N_{min} = 2^{-23} * 2^{-128} \cong 3.5 * 10^{-46}$ (non normalizzata)
- $N_{min} = 2^{22} * 2^{-23} * 2^{-128} \cong 1.5 * 10^{-39}$ (normalizzata)

Rappresentazione normalizzata

- Valutiamo l'errore di approssimazione:
  - Errore assoluto massimo: $Err_{max} = (2^{-p}/2)*2^{E}$
  - Errore relativo: $E_{rel} = Err_{max}/x$

- Pro
  - Maggiore precisione
- Contro
  - Underflow più frequente



Lo standard IEEE754

- Due formati
  - 32 bit: 23 bit mantissa + 8 bit esp. + 1 bit segno
  - 64 bit: 52 bit mantissa + 11 bit esp. + 1 bit segno
- Mantissa con *hidden bit*
  $N = (-1)^s * (1.M) * 2^{E-127}$
- Esponente polarizzato
  - I valori 0 e 255 sono riservati
- Intervallo di rappresentazione
  $1.8*10^{-38}$, $3.4*10^{38}$
- Underflow graduale, denormalizzazione

Lo standard IEEE 754

- Permette la rappresentazione di casi particolari:
  - NaN (0/0, sqrt(-2^k))
  - $+\infty$, $-\infty$

E	M	N
255	**≠0**	**NaN**
255	**=0**	**$(-1)^s \infty$**
0	**0**	**0**
0	**≠0**	**$(-1)^s * 2^{-126} * (0.M)$**

denormalizzato