# Approccio statistico alla classificazione

Approccio parametrico e non parametrico

Finestra di Parzen

Classificatori K-NN 1-NN

## Limitazioni dell'approccio bayesiano

- Con l'approccio bayesiano, sarebbe possibile costruire un classificatore ottimo se si conoscessero:
  - le probabilità a priori $P(\omega_i)$
  - le densità condizionate alla classe $P(x \mid \omega_i)$
- Informazioni che raramente sono disponibili
- Alternativa: costruire una classificatore da un insieme di esempi (training set)
  - Pro: stima delle $P(\omega_i)$ semplicemente realizzabile
  - Contro: training set troppo limitato per una stima affidabile delle distribuzioni condizionate

## Approccio parametrico

- In questo tipo di approccio si assume nota la forma delle densità condizionali; tipicamente si assume una gaussiana $P(x \mid \omega_i) \sim N(\mu_i, \Sigma_i)$.
- Ci sono quindi due parametri da stimare per ogni classe.
- Le tecniche più usate per la stima sono:
  - Maximum-Likelihood (ML)
  - Stima Bayesiana
- Sebbene differenti nella logica, le due tecniche portano a risultati quasi identici.

## Approccio parametrico: Stima Maximum Likelihood

- I parametri sono fissati, ma non noti.
- I valori ottimali dei parametri sono ottenuti attraverso la massimizzazione della probabilità di ottenere i campioni osservati.
- La stima ha buone proprietà di convergenza al crescere dell'insieme di campioni.
- E' più semplice di altre tecniche.

# Approccio parametrico: Stima Maximum Likelihood

- Principi generali
  - assumiamo di avere c classi, con
    $P(x \mid \omega_j) \sim N(\mu_j, \Sigma_j)$
    $P(x \mid \omega_j) \equiv P(x \mid \omega_j, \theta_j)$ dove:

    $$\theta_j = (\mu_j, \Sigma_j) = (\mu_j^1, \mu_j^2, ..., \sigma_j^{11}, \sigma_j^{22}, \text{cov}(x_j^m, x_j^n)...)$$

  - per ogni classe $\omega_i$ abbiamo un insieme di campioni $D_i$
  - supponiamo, inoltre, che i campioni in $D_i$ non diano informazioni su $\theta_j$

# Approccio parametrico: Stima Maximum Likelihood

- In queste ipotesi si può lavorare indipendentemente su ogni classe.
- Consideriamo una classe generica cui corrisponde un insieme D contenente n campioni, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estratti indipendentemente.
- La probabilità di ottenere l'insieme D dato $\theta$ è quindi:

$$P(D \mid \theta) = \prod_{k=1}^{n} P(x_k \mid \theta)$$

- Per definizione la stima ML di $\theta$ è il valore che massimizza $P(D \mid \theta)$.
  E' il valore di $\theta$ che meglio si accorda con i campioni di training effettivamente osservati

# Approccio parametrico: Stima bayesiana

- Nella stima ML il parametro $\theta$ era assunto fisso.
- Nella stima bayesiana la forma di $p(x \mid \theta)$ è assunta nota, ma il valore di $\theta$ non è noto.
- $\theta$ è considerato una variabile aleatoria di densità nota $p(\theta)$.
- Il resto della conoscenza a priori è contenuto in un insieme D di n campioni $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indipendenti estratti da una popolazione avente densità p(x).
- La densità condizionata viene valutata come:

$$p(x \mid D) = \int p(x \mid \theta) p(\theta \mid D) d\theta$$

dove $p(\theta|D) \propto p(D|\theta)\, p(\theta)$ e l'integrale viene approssimato o valutato numericamente.

# Approccio non parametrico

- Nell'approccio parametrico tutte le densità erano unimodali (hanno un singolo massimo locale), mentre in molti problemi pratici le densità sono multimodali.
- Con l'approccio non parametrico si rimuove l'assunzione della conoscenza delle densità per cui si può lavorare co distribuzioni di forma arbitraria.
- Due tipologie di metodi non parametrici:
  - Stimare $p(x \mid \omega_j)$
  - Stimare direttamente le probabilità a posteriori $P(\omega_j|x)$

## Stima della densità

- Consideriamo la probabilità che un vettore x, la cui densità è p(x), cada in una regione R:

$$P = \int_R p(\xi) d\xi$$

- Consideriamo n campioni i.i.d. di x $x_1,\ldots,x_n$. La probabilità che k di questi cadranno in R sarà data da:

$$P_k = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

mentre il valore atteso per k è E[k]=nP.

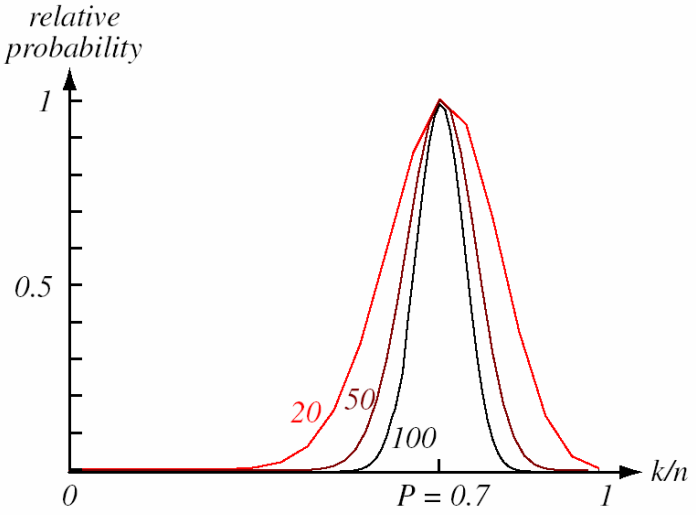
## Stima della densità

- Possiamo quindi assumere $P \cong k/n$, dove la stima diventa più accurata al crescere di n.
- D'altra parte, se supponiamo p(x) continua ed R sufficientemente piccola, possiamo porre:

$$P = \int_R p(\xi) d\xi \cong p(x) \int_R d\xi = p(x)V$$

- In questo modo, otteniamo una stima di p(x):

$$p(x) \cong \frac{k/n}{V}$$




# Stima della densità

Alcuni problemi:

- se fissassimo il volume V e facessimo crescere n, otterremmo una media di p(x):

$$\frac{P}{V} = \frac{\int_R p(\xi) d\xi}{\int_R d\xi}$$

per cui dovremmo considerare un volume che tende a zero.

- Tuttavia, per n fissato, R diventerebbe talmente piccola che k=0 (e quindi p(x) $\cong$0); altrimenti se k>0, la stima divergerebbe.

# Stima della densità

- Mettiamoci nell'ipotesi di avere un numero illimitato di campioni.
- Per valutare p(x) consideriamo una sequenza di regioni $R_1, R_2, \ldots, R_n$ contenenti x: la regione $R_s$ si impiega nel caso n=s.
- Se $V_n$ è il volume di $R_n$, $k_n$ il numero di campioni che cadono in $R_n$ and $p_n(x)$ è l n-ma stima di p(x), si ha:

$$p_n(x) = (k_n/n)/V_n$$

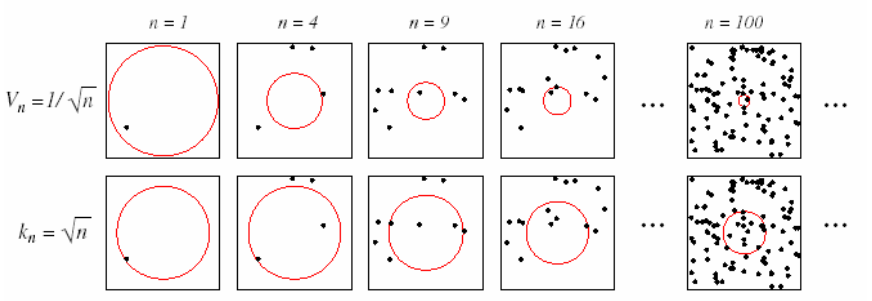
# Stima della densità

- Perché $p_n(x)$ converga a p(x) sono necessarie tre condizioni:

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} k_n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0$$

- Due modi per ottenere tali condizioni:
  - ridurre la regione R definita inizialmente specificando il volume $V_n$ come funzione di n (es.: $V_n=1/\sqrt{n}$) e dimostrare che $p_n(x) \rightarrow p(x)$ per $n \rightarrow \infty$ (*metodo della finestra di Parzen*).
  - specificare $k_n$ come funzione di n (es.: $k_n= \sqrt{n}$). In questo caso, $V_n$ cresce fino a contenere $k_n$ campioni (*stima a $k_n$ vicini*).

# Stima della densità




Stima della densità con i due metodi. Entrambe le sequenze rappresentano variabili aleatorie che generalmente convergono, permettendo di stimare la densità nel punto di interesse.

# Metodo della finestra di Parzen

- Assumiamo che la regione $R_n$ sia un ipercubo a d dimensioni, di lato $h_n$ e volume $V_n = h_n^d$.
- Consideriamo una *funzione finestra* $\varphi(u)$ che unitaria all'interno di un ipercubo centrato nell'origine e di lato unitario:

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 & |u_j| \le \frac{1}{2} \quad j = 1, \ldots, d \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\varphi((x-x_i)/h_n)$ è uguale a 1 se $x_i$ cade all'interno dell'ipercubo di volume $V_n$ centrato su x e nullo al di fuori.

# Metodo della finestra di Parzen

- Il numero di campioni che cade all'interno di Vn è quindi uguale a:

$$k_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$$

- La stima della densità è quindi:

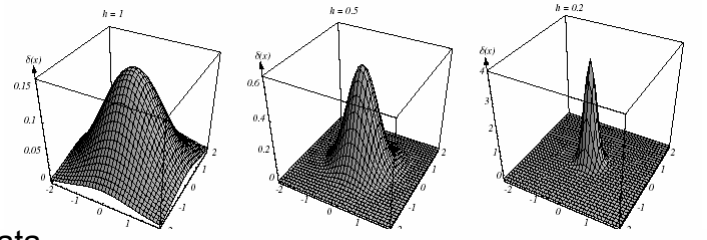
$$p_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_n}\varphi\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$$

- $p_n(x)$ stima $p(x)$ come la media di funzioni di x e dei campioni $(x_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$. La funzione $\varphi$ può essere di forma generale purchè si verifichi $\varphi(u) \geq 0$ e $\int \varphi(u)du = 1$.

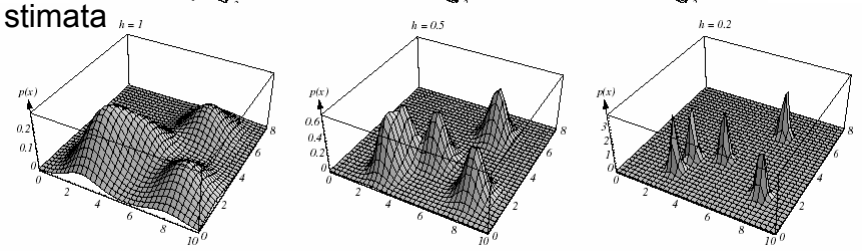
# Metodo della finestra di Parzen

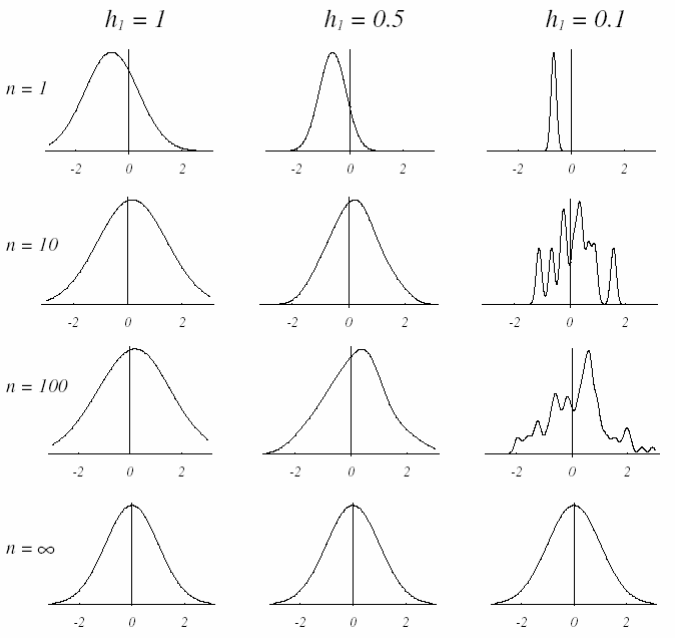
A parità di n, la stima dipende dalla forma della $\varphi$:

$\varphi(u)$




p(x) stimata



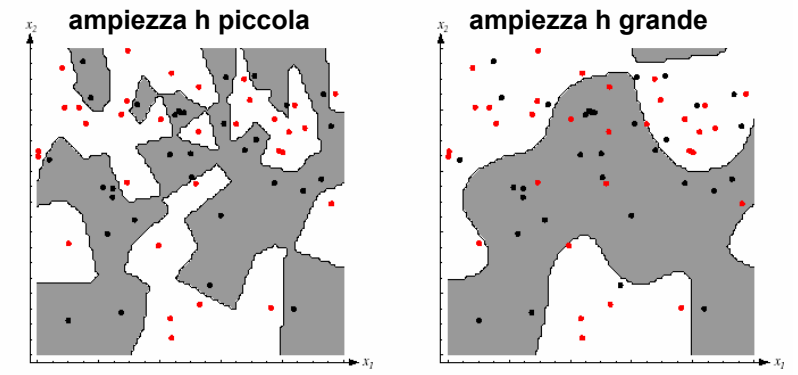



Più in generale, la stima dipende dalla forma di $\varphi$ e dal numero di campioni n.

## Classificazione

- Nei classificatori basati sulla stima con la finestra di Parzen, si stima la densità condizionata per ogni classe e si esegue la classificazione con la regola della massima probabilità a posteriori.
- Le regioni di decisione dipendono dalla scelta della funzione finestra.

# Classificazione




La forma della $\varphi$ influisce sulle regioni di decisione.

# Stima $k_n$-nearest-neighbor

- Un problema della stima con la finestra di Parzen è la scelta della funzione di finestra.
- Con la stima a $k_n$ *vicini* ($k_n$ *nearest neighbor*) si va a stimare direttamente le probabilità a posteriori per ogni classe.
- La classificazione si limita quindi a scegliere la classe con la massima prob. a posteriori .

## Stima $k_n$-nearest-neighbor

- Supponiamo di circondare un punto x appartenente ad un insieme di n campioni con un cella di volume V.
- Se la cella assorbe k campioni, di cui $k_i$ appartenenti alla classe $\omega_i$, una stima della probabilità congiunta $p(x,\omega_i)$ è data da:

$$p_n(x,\omega_i) = \frac{k_i/n}{V}$$

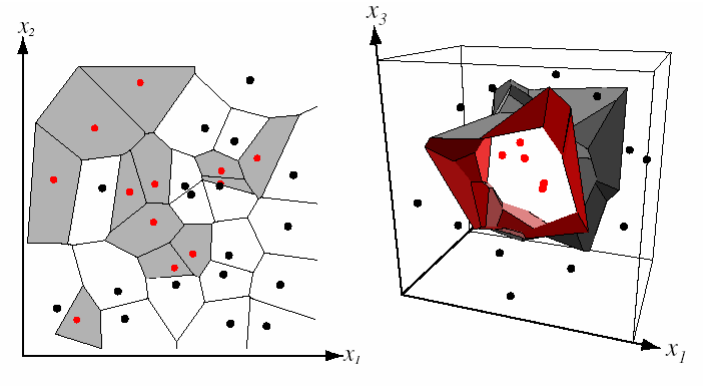
e quindi possiamo ottenere una stima di $P(\omega_i|x)$ come:

$$P_n(\omega_i \mid x) = \frac{p_n(x,\omega_i)}{\sum_{j=1}^{C} p_n(x,\omega_j)} = \frac{k_i}{k}$$

## Classificatore Nearest-Neighbor

- E' un classificatore non parametrico che impiega un insieme $D_n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ di campioni appartenenti a tutte le classi, detti *prototipi*.
- La classificazione di un nuovo campione x non appartenente a $D_n$ avviene scegliendo l'etichetta del prototipo x' a minima distanza da x.
- Viene denotato con "classificatore NN".

## Classificatore Nearest-Neighbor




Il classificatore NN induce sullo spazio delle features una tassellazione di Voronoi.

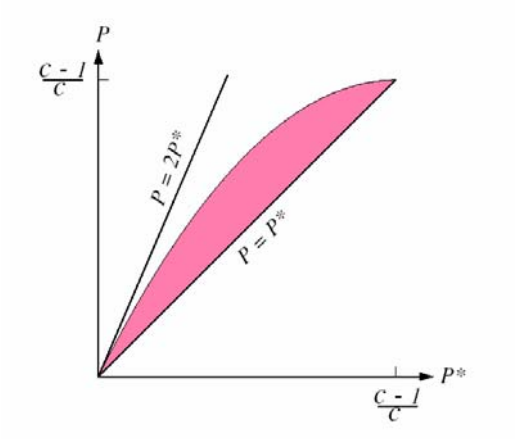
## Classificatore Nearest-Neighbor

- Il classificatore è sub-ottimo nel senso che non garantisce la probabilità di errore minima esibita dal classificatore bayesiano.
- E' però possibile dimostrare che, al crescere di n, la probabilità di errore $P_e$ per il classificatore NN soddisfa la seguente relazione:

$$P_e^* \leq P_e \leq 2P_e^*$$

dove $P_{e^*}$ è la probabilità di errore del classificatore bayesiano.

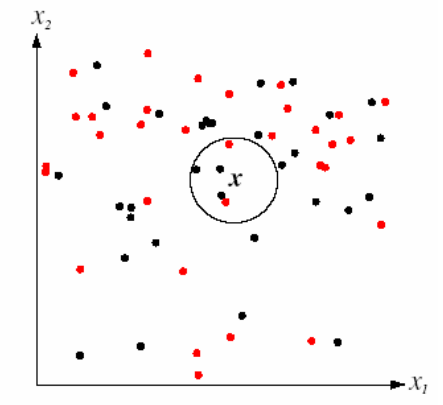
## Classificatore Nearest-Neighbor




## Classificatore k-nearest-neighbor

- Una naturale estensione del classificatore NN è il k-Nearest-Neighbor, denotato con “classificatore k-NN” (perciò il classificatore NN viene spesso denotato con “1-NN”).
- La classificazione di un campione x comporta l’individuazione in $D_n$ dei k punti più vicini a x e la scelta dell’etichetta più rappresentata.
- Per evitare degli ex-aequo tra classi, è necessario scegliere k dispari.

# Classificatore k-nearest-neighbor




# Classificatore k-nearest-neighbor

All'aumentare di k la probabilità di errore del classificatore k-NN si avvicina alla probabilità del classificatore bayesiano.